

Algoritmi e Principi dell'Informatica

Prontuario di logica del prim'ordine - errori comuni

Stai quasi certamente sbagliando se uno dei casi seguenti si applica alla tua formula.

1. C'è una qualche variabile *non* quantificata nella tua formula che non sia un parametro del programma/funzione che stai descrivendo.
2. Stai quantificando qualcosa che non è una variabile (ad esempio stai quantificando un atomo o un termine).

Ad esempio, per esprimere qualche proprietà p delle stringhe, se c'è un predicato unario *string* che indica che il suo argomento è una stringa, la formula

$$\forall string(x) p(x)$$

non va bene perché non stai quantificando una variabile. Presumibilmente la versione corretta della formula è qualcosa di questo tipo:

$$\forall x (string(x) \rightarrow p(x))$$

3. Stai “incrementando” una variabile. L'espressione

$$x = x + 1$$

è banalmente sempre falsa, in logica del prim'ordine.

4. Stai usando un'implicazione (“ \rightarrow ”) all'interno di una quantificazione esistenziale (molto raro). Ricorda che una frase del tipo “esiste un numero minore di 10 che è anche minore di 5” non si traduce come

$$\exists x(x < 10 \rightarrow x < 5)$$

bensì come

$$\exists x(x < 10 \wedge x < 5)$$

5. Stai usando una congiunzione (“ \wedge ”) all'interno di una quantificazione universale (raro). Ricorda che una frase del tipo “ogni numero minore di 5 è anche minore di 10” non si traduce come

$$\forall x(x < 5 \wedge x < 10)$$

bensì come

$$\forall x(x < 5 \rightarrow x < 10)$$

6. Ci sono parentesi aperte mai chiuse o chiuse mai aperte.
7. Stai quantificando, in punti diversi, due variabili con lo stesso nome e usandole come se fossero la stessa variabile. Ad esempio, la formula seguente intende specificare che gli elementi dell'array a (di 5 elementi) sono tutti diversi:

$$\forall x \forall y (1 \leq x \leq 5 \wedge 1 \leq y \leq 5 \rightarrow \neg \exists y (x \neq y \wedge a[x] = a[y]))$$

Ma la variabile y è già stata quantificata (universalmente) al livello più esterno della formula, quindi non ha senso riquantificarla internamente (peraltro con un quantificatore di tipo diverso). Occorre eliminare uno dei due quantificatori, dato che il “ruolo” pensato per la y è unico:

$$\forall x (1 \leq x \leq 5 \rightarrow \neg \exists y (1 \leq y \leq 5 \wedge x \neq y \wedge a[x] = a[y]))$$

8. Stai usando una variabile con un'altra variabile ad apice o pedice. Probabilmente devi riformulare il tutto in una sintassi compatibile con la logica del prim'ordine mediante opportuni quantificatori, funzioni e predicati. Ad esempio, il seguente è un tentativo (errato) di specifica del predicato binario *reverse*, che indica che il primo argomento letto da sinistra a destra è uguale al secondo letto da destra a sinistra:

$$\forall x \forall y (reverse(x, y) \leftrightarrow$$

$$\exists z_1 \exists z_2 \dots \exists z_{|x|} (\forall k (1 \leq k \leq |x| \rightarrow |z_k| = 1) \wedge z_1 \cdot z_2 \cdot \dots \cdot z_{|x|} = x \wedge z_{|x|} \cdot z_{|x|-1} \cdot \dots \cdot z_1 = y))$$

La soluzione va cercata in un altro modo. Ad esempio, l'“iterazione” intesa lungo tutti i caratteri della stringa x può essere riformulata in termini ricorsivi sulla stringa:

$$\forall x \forall y (\text{reverse}(x, y) \leftrightarrow x = \epsilon \wedge y = \epsilon \vee \exists z \exists w \exists t (|z| = 1 \wedge x = z \cdot w \wedge y = t \cdot z \wedge \text{reverse}(w, t)))$$

9. Stai usando segni di punteggiatura (ad esempio la virgola “,” , il punto “.” , i due punti “:” o la barra verticale “|”) al posto di opportuni connettivi logici. Ricorda che la virgola si usa esclusivamente per separare gli argomenti di una funzione o di un predicato. L'uso del punto, dei due punti o della barra verticale, benché espletivo e comune in qualche testo (unicamente come separatore tra una quantificazione esistenziale e la formula quantificata), è inessenziale. Questi simboli non possono mai sostituire i connettivi logici.
10. Stai uguagliando un atomo a 1 o 0 o a *TRUE* o *FALSE*: non si scrive così! Basta scrivere l'atomo da solo (o la sua negazione).

Esempio:

$$p(a) = 0 \wedge p(b) = 1$$

va scritto come

$$\neg p(a) \wedge p(b)$$