Esercitazione 1/6/22

Grafi

$G = (V, E)$

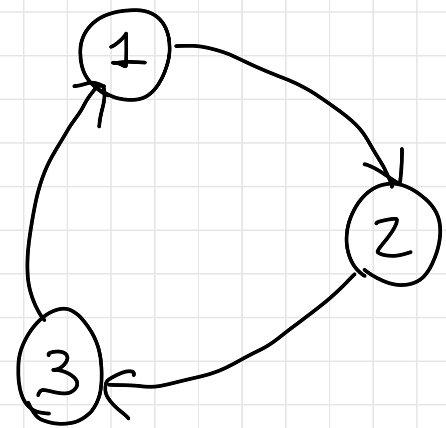
V → nodi

E → archi

$E \subseteq V \times V$

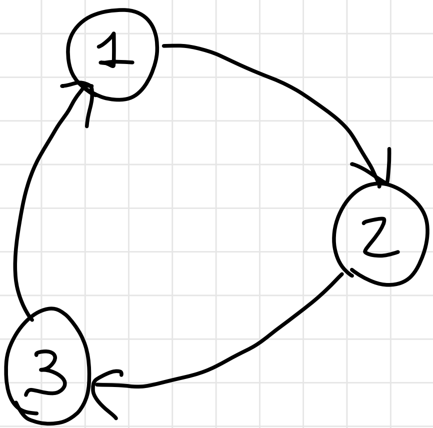
$V = \{1, 2, 3\}$

$E = \{(1,2), (2,3), (3,1)\}$

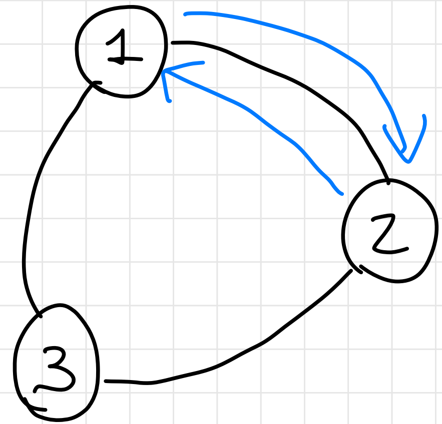


Grafo orientato

Grafo orientato



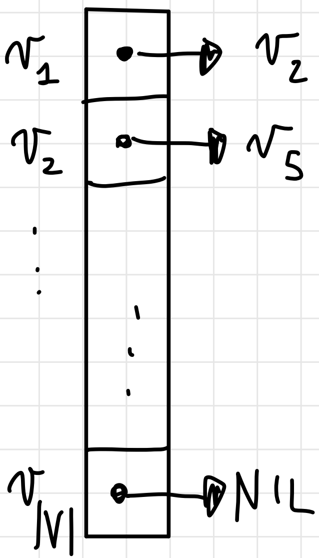
Grafo non orientato



$$(v_1, v_2) \in E \Rightarrow (v_2, v_1) \in E$$

Rappresentazioni in memoria:

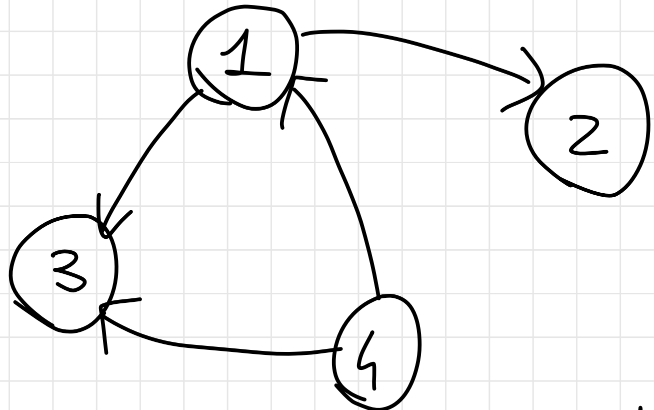
Liste di adiacenza



$|V|$ = grand. dell'insieme V

Matrice di adiacenza

$$
\begin{array}{c|cccccc}
v_1 & 0 & 1 & 1 & 0 & \cdots & \\
v_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots \\
\vdots & & & & & & \\
v_{|V|} & & & & & & \\
\hline
 & v_1 & v_2 & - & -v_3 & v_5 & v_{|V|}
\end{array}
$$



Liste d'ad. :

1 $\bullet \to 2 \to 3$

2 $\bullet \to$ NIL

3 $\bullet \to$ NIL

4 $\bullet \to 3 \to 1$

Matrice :

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Complessità spaziale

Liste: $\Theta(|V| + |E|)$

Matrice: $\Theta(|V|^2)$

$\emptyset \leq |E| \leq |V|^2$

$|E| \approx |V|^2$ (grafo denso)

$\downarrow$

conviene la matrice

$|E| << |V|^2$ (grafo sparso)

$\downarrow$

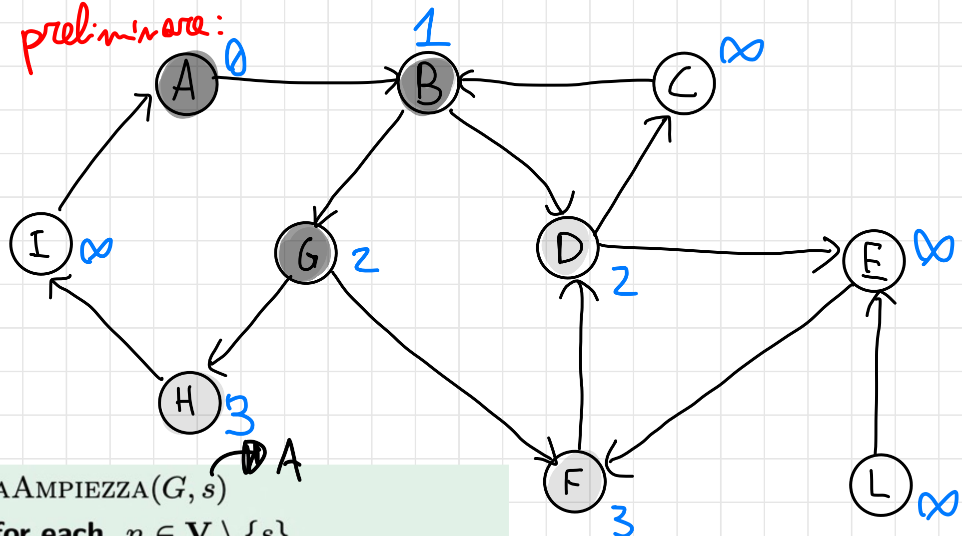
Conviene usare le liste

Complessità temporale di det. se $(v_1, v_2) \in E$:

Liste: $O(|V|)$

Matrice: $O(1)$

Operazione tipica: visita di tutti i nodi raggiungibili da una sorgente es. preliminare:



A

```
VisitaAmpiezza(G, s)
for each  n ∈ V \ {s}
    n.color ← white
    n.dist ← ∞
s.color ← grey
s.dist ← 0
Q ← ∅
Enqueue(Q, s)
while ¬IsEmpty(Q)
    curr ← Dequeue(Q)
    for each  v ∈ curr.adiacenti
        if v.color = white
            v.color ← gray
            v.dist ← curr.dist + 1
            Enqueue(Q, v)
    curr.color ← black
```

$\Theta(|V|)$

$\Theta(|E|)$

curr = D

curr.adj =

H F ~~D~~ ~~G~~ ~~B~~ ~~A~~ $\longrightarrow$ Q

Complessità temporale : $\Theta(|V| + |E|)$
BFS
DFS

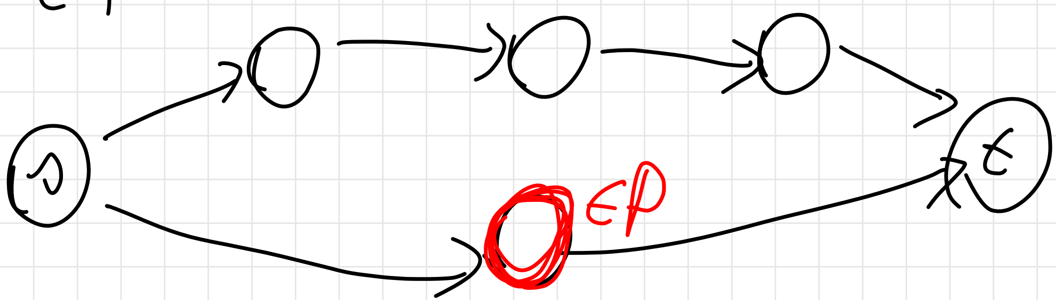
Es.:

Dato $G = (V, E)$, $s, t \in V$

s → sorgente, t → target

$P \subseteq V$ → nodi proibiti

trovare cammino minimo tra s e t senza nodi $\in P$



Idea: modificare l'algo. BFS ✓

colorare di nero nodi proibiti

$\Theta(|V| + |E|)$

Sol. alternativa:

Utilizzare e modificare Dijkstra

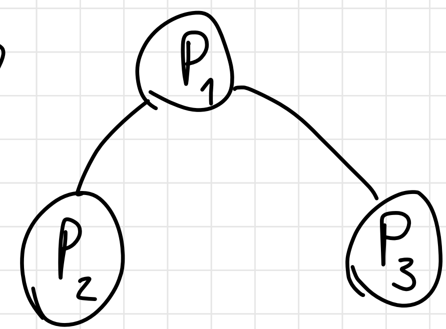
impongo peso degli archi che toccano $n \in P$ $= +\infty$

$\Theta((|V| + |E|) \log |V|)$ non ottimale es.: Ci sono n Pugili

C'è una relazione di rivalità tra i pugili (riflessiva)

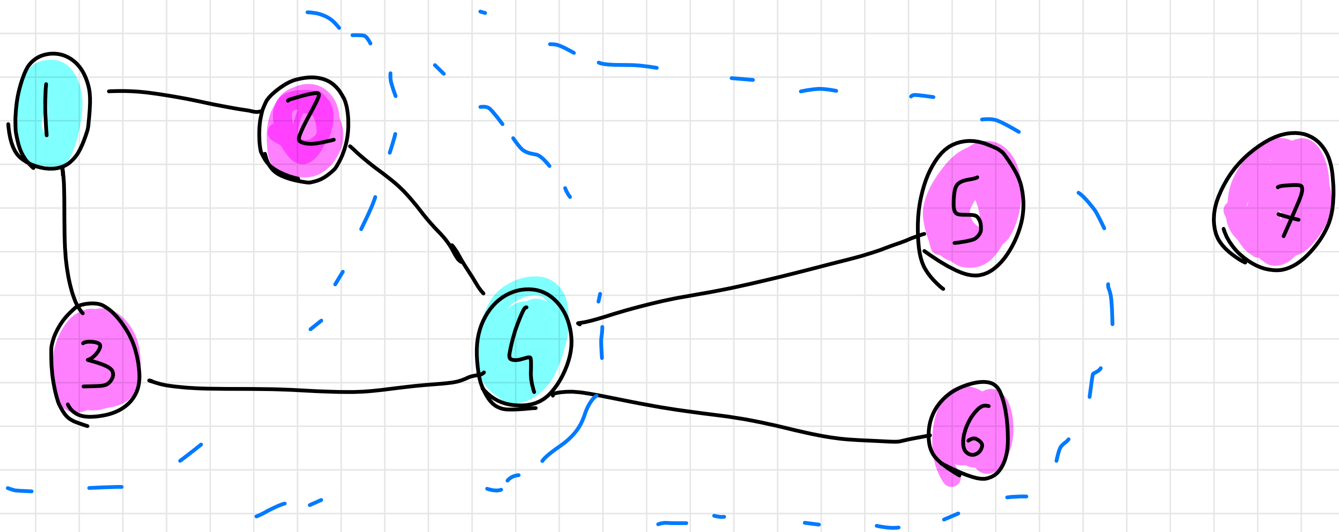
Obiettivo: trovare una struttura dati per salvare questo insieme e partizionarlo in due team affinché non ci siano rivali nello stesso team

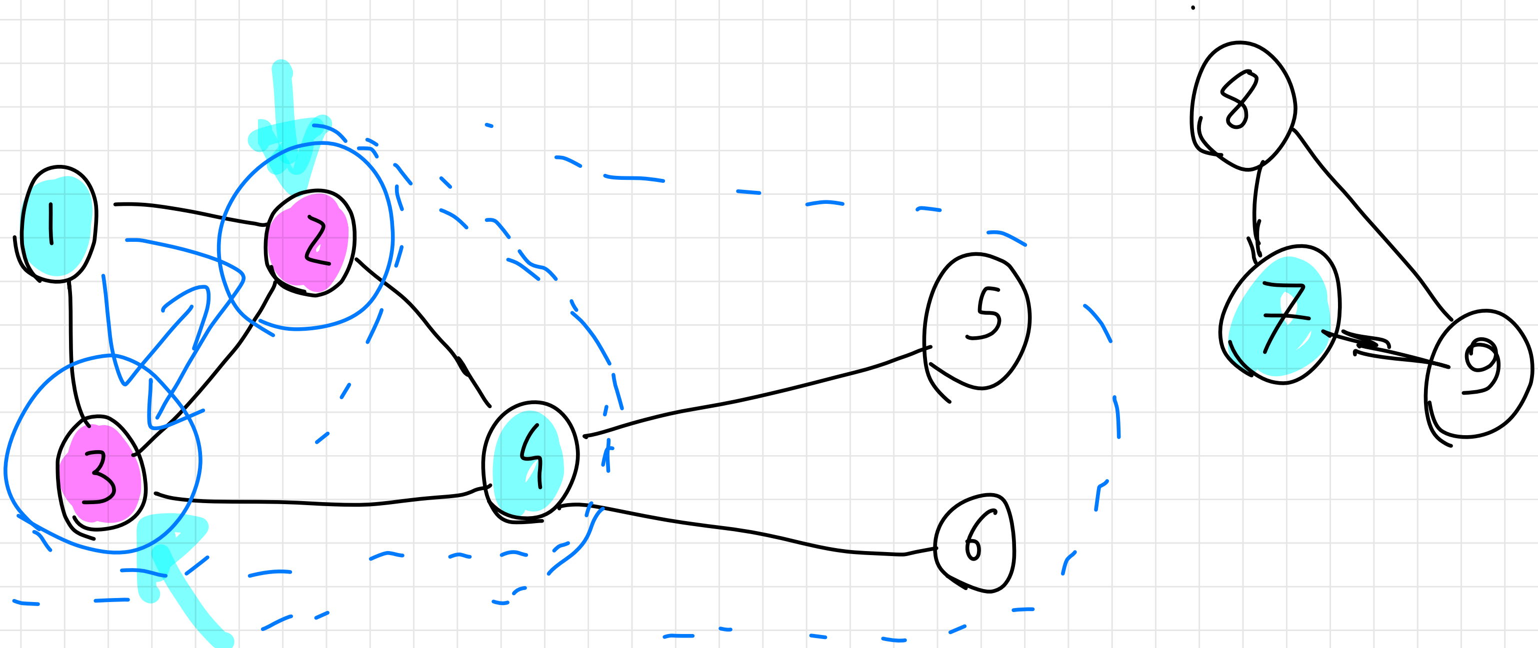
$P_1 \; r \; P_2$ $\qquad$ $P_1 \; r \; P_3 \not\Rightarrow$

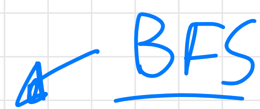


Prima idea: "complementare" il grafo, cioè creo un altro grafo $G' = (V, E')$: $v_1, v_2 \in E \iff v_1, v_2 \notin E'$

Non vogliamo creare un altro grafo





$\Theta(|V| + |E|)$ 

Esercizio 3 (9 punti, si svolga solo il punto 1 in caso di riduzione del 30%)
Si definisca *permutazione bidimensionale* una funzione biunivoca dall'insieme S di tutte le coppie ordinate di numeri interi tra 0 e $n-1$, per un dato intero n, a se stesso.

Si consideri una matrice M quadrata, di lato n. Ogni elemento della matrice è una coppia di numeri interi, x e y, compresi tra 0 e $n-1$. Si interpreti la matrice come una funzione $f(x,y)$: $(x,y) \mapsto M[x,y]$ con x e y interi, $0 \le x < n$, $0 \le y < n$.

1. Si realizzi in pseudocodice un algoritmo a complessità temporale minima che verifica se una matrice M rappresenta una permutazione bidimensionale, dimostrandone la minimalità della complessità.

2. Viene detto *orbita* in una permutazione un (sotto-)insieme degli elementi permutati tale per cui, applicando iterativamente la permutazione ognuno di essi va ad occupare, via via ad ogni iterazione, il posto di tutti gli altri dell'orbita. Si descriva un algoritmo che determina la dimensione dell'orbita massima della funzione rappresentata da una matrice M, assumendo che essa sia una permutazione bidimensionale.

Sia $n=4$. Allora $S = \{(0,0), (0,1), (0,2), \dots$
tutte le coppie di num. tra 0 e 3. $(3,0), (3,1), (3,2), (3,3)\}$

$f : S \to S$ biunivoca $\equiv f$ perm. bidim.

M matrice quadrata di dim. $n \times n$.

$\forall i, j \in \{0, \ldots, n-1\} : M[i, j] = (x, y)$

$0 \leq x < n \quad , \quad 0 \leq y < n$

$f : (x, y) \longmapsto M[x, y]$

$f : S \to S$

1 : $T(n) = \Omega(n^2)$ ...

Decidere ordinamento

Ordinare : $\Theta(n^2 \log(n^2)) = \Theta(n^2 \log(n))$

$(0,0), (0,1), \dots, (0, n-1)$

$(1,0), (1,1), \dots, (1, n-1)$ $\Theta(n^2)$

$\vdots$

$(n-1, 0), \dots, (n-1, n-1)$

Altra idea: Creo un'altra matrice $n \times n$ → Visto

Inizializzo la matrice con tutti 0

```
for i : 0 → n-1 :
    for j : 0 → n-1 :
        x, y ← M[i, j]
        if Visto[x, y] = 0 :
            Visto[x, y] = 1
        else
            return False
return True
```

$T(n) = \Theta(n^2)$

Esercizio 3 (9 punti, si svolga solo il punto 1 in caso di riduzione del 30%)
Si definisca *permutazione bidimensionale* una funzione biunivoca dall'insieme S di tutte le coppie ordinate di numeri interi tra 0 e $n-1$, per un dato intero n, a se stesso.

Si consideri una matrice M quadrata, di lato n. Ogni elemento della matrice è una coppia di numeri interi, x e y, compresi tra 0 e $n-1$. Si interpreti la matrice come una funzione $f(x, y)$: $(x, y) \mapsto M[x, y]$ con x e y interi, $0 \leq x < n$, $0 \leq y < n$.

1. Si realizzi in pseudocodice un algoritmo a complessità temporale minima che verifica se una matrice M rappresenta una permutazione bidimensionale, dimostrandone la minimalità della complessità.

2. Viene detto *orbita* in una permutazione un (sotto-)insieme degli elementi permutati tale per cui, applicando iterativamente la permutazione ognuno di essi va ad occupare, via via ad ogni iterazione, il posto di tutti gli altri dell'orbita. Si descriva un algoritmo che determina la dimensione dell'orbita massima della funzione rappresentata da una matrice M, assumendo che essa sia una permutazione bidimensionale.

2: M è una perm. bidim. $O \subseteq S$

$$M = f \quad \begin{array}{c|ccc} & 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & (1,1) & (2,2) & (1,0) \\ 1 & (2,0) & (1,2) & (0,0) \\ 2 & (2;1) & (0;1) & (0;2) \end{array}$$

$$O = \{(0,0), (1,1), (1,2)\}$$

$$f(0,0) = (1,1)$$

$$f(1,1) = (1,2)$$

$$f(1,2) = (0,0)$$

$(0,1)$

~~3~~ ~~4~~ ~~5~~ 6

tmp_max = 3

Algoritmo per orbita max: creare una matrice Visto, sfruttare il fatto che M perm. bid.

TdE:

Limite sup.:

$$T(n) = n^2 + T\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + T\left(\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor\right) + \ldots + T\left(\left\lfloor \frac{n}{2^k} \right\rfloor\right)$$

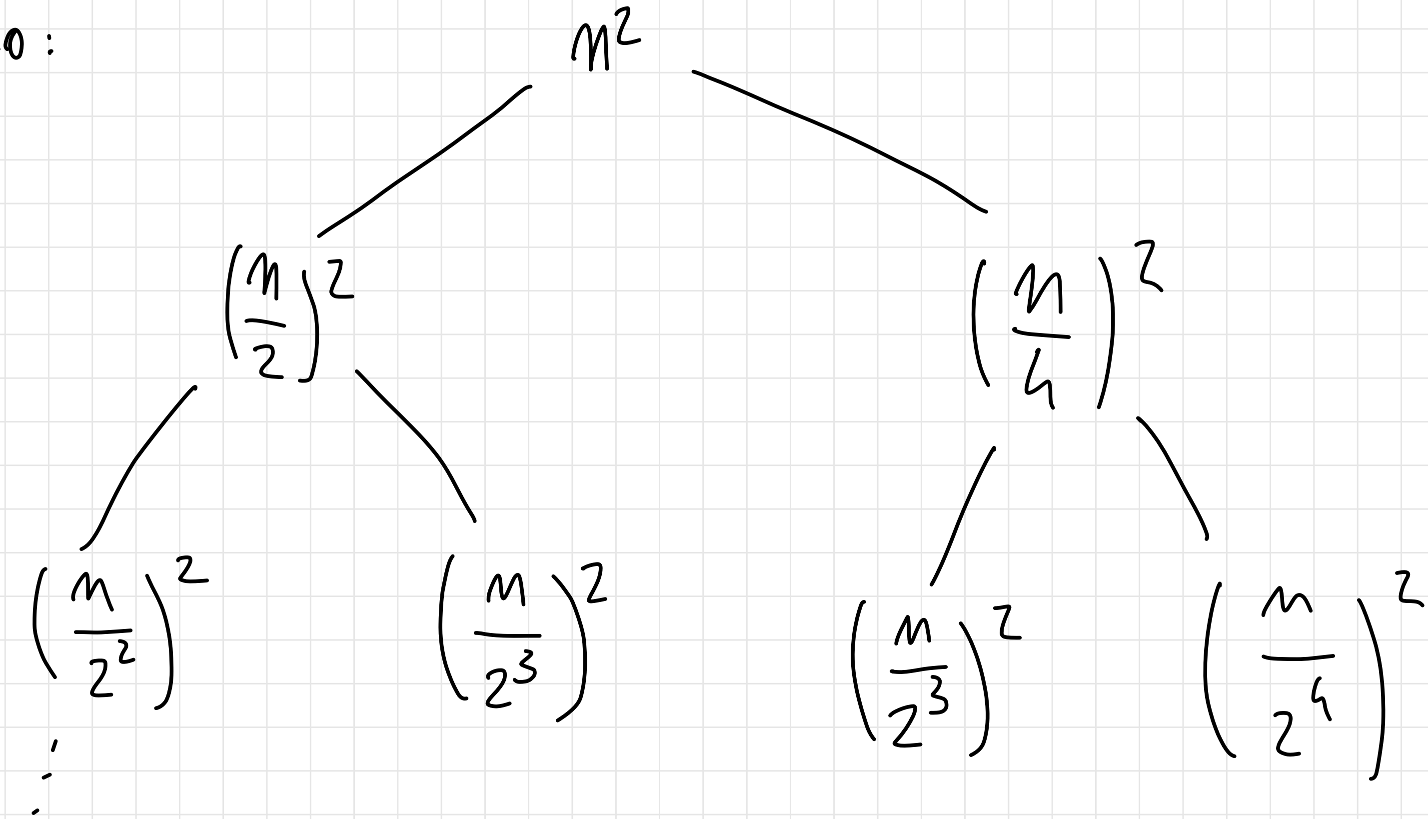
dove k costante intera > 1 e n potenza di 2

No MT

$k = 2$ per la congettura

$$T(n) = n^2 + T\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + T\left(\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor\right)$$

Albero:



$$T(n) = n^2 + T\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + T\left(\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor\right)$$

$$= n^2 + \left(\left(\frac{n}{2}\right)^2 + T\left(\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor\right) + T\left(\left\lfloor \frac{n}{8} \right\rfloor\right)\right) +$$

$$\left(\left(\frac{n}{4}\right)^2 + T\left(\left\lfloor \frac{n}{8} \right\rfloor\right) + T\left(\left\lfloor \frac{n}{16} \right\rfloor\right)\right)$$

$$\approx n^2 + \left(\left(\frac{n}{2}\right)^2 + \left(\frac{n}{4}\right)^2 + T\left(\frac{n}{8}\right) + T\left(\frac{n}{16}\right)\right) +$$

$$\ldots$$

Albero:

$$n^2 \qquad \textcolor{red}{\leq n^2}$$

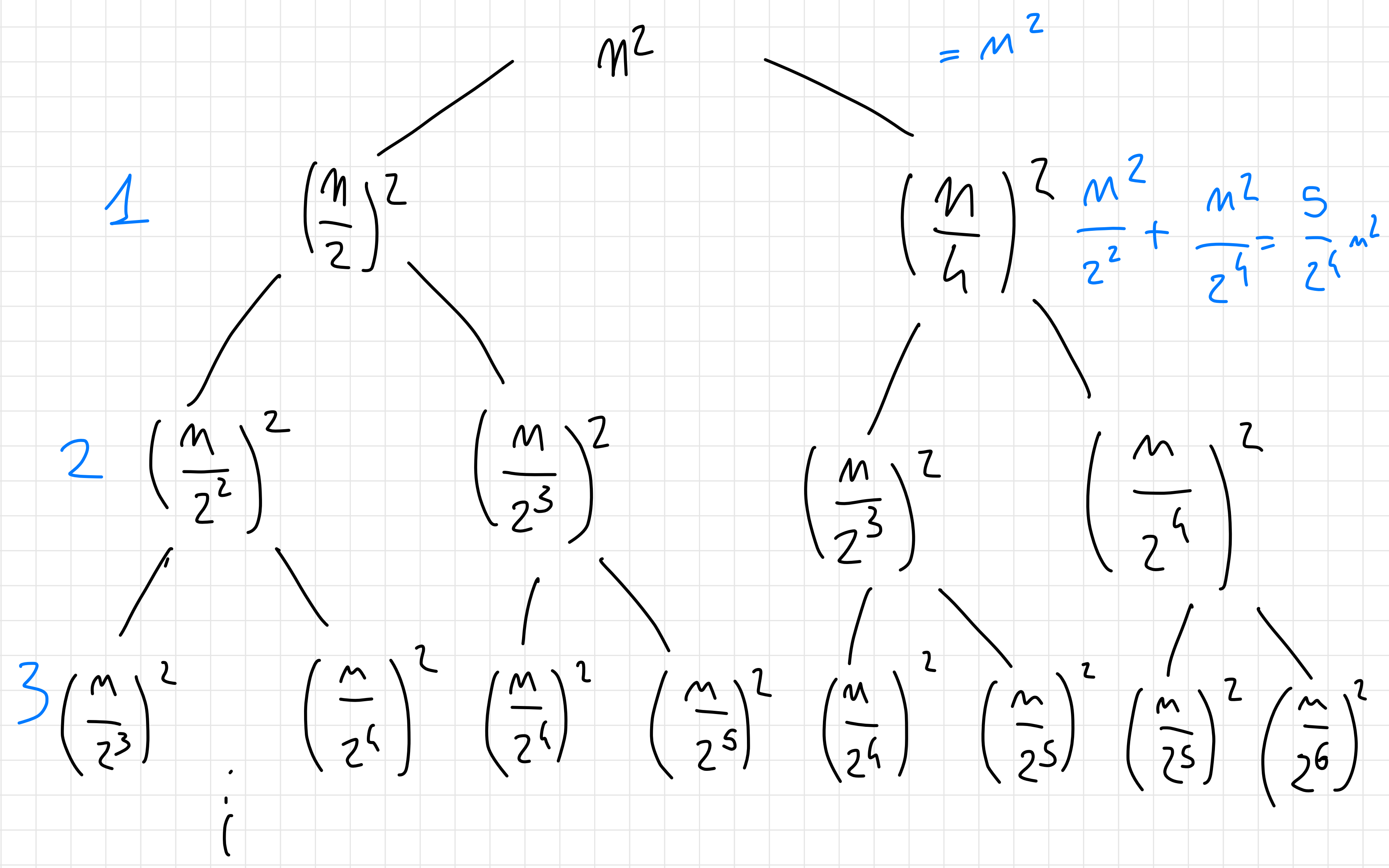
$$\left(\frac{n}{2}\right)^2 \qquad \left(\frac{n}{4}\right)^2 \qquad \textcolor{red}{\leq n^2}$$

$$\left(\frac{n}{2^2}\right)^2 \qquad \left(\frac{n}{2^3}\right)^2 \qquad \left(\frac{n}{2^3}\right)^2 \qquad \left(\frac{n}{2^4}\right)^2 \qquad \textcolor{red}{\leq n^2}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

Sondiamo h $\quad \dfrac{n}{2^h} = 1 \quad n = 2^h \quad \Rightarrow h = \log_2(n)$

$$T(n) = O\left(n^2 \log(n)\right)$$


n^2
$= n^2$
1
$\left(\frac{n}{2}\right)^2$
$\left(\frac{n}{4}\right)^2$
$\frac{n^2}{2^2} + \frac{n^2}{2^4} = \frac{5}{2^4} n^2$
2
$\left(\frac{n}{2^2}\right)^2$
$\left(\frac{n}{2^3}\right)^2$
$\left(\frac{n}{2^3}\right)^2$
$\left(\frac{n}{2^4}\right)^2$
3
$\left(\frac{n}{2^3}\right)^2$
$\left(\frac{n}{2^4}\right)^2$
$\left(\frac{n}{2^4}\right)^2$
$\left(\frac{n}{2^5}\right)^2$
$\left(\frac{n}{2^4}\right)^2$
$\left(\frac{n}{2^5}\right)^2$
$\left(\frac{n}{2^5}\right)^2$
$\left(\frac{n}{2^6}\right)^2$
⋮

2° liv. : $n^2\left(\frac{1}{2^4} + \frac{2}{2^6} + \frac{1}{2^8}\right) = \frac{25}{2^8} n^2$

3° liv : $n^2 \left(\frac{2^6 + 3 \cdot 2^4 + 3 \cdot 2^2 + 1}{2^{12}}\right) = \frac{125}{2^{12}} n^2$

$$T(n) = n^2 + \sum_{i=1}^{\log_2(n)} \frac{5^i}{16^i} n^2$$

$$= n^2 + n^2 \sum_{i=1}^{\log_2 n} \frac{5^i}{16^i} \leq n^2 + n^2 \sum_{i=1}^{\log_2(n)} \frac{5^{\log_2(n)}}{(2^4)^{\log_2(n)}}$$

$$\log_2 n = \frac{\log_5 n}{\log_5 2}$$

$$= n^2 + n^2 \sum_{i=1}^{\log_2(n)} \frac{n^{1/\log_5 2}}{n^4}$$

$$= n^2 + \cancel{n^2} \log_2(n) \frac{n^{\log_2 5}}{n^{\cancel{4}} 2}$$

$$\leq n^2 + \log_2(n) \frac{n^{\cancel{3}}}{\cancel{n^2}} = O(n^2)$$

$$\log_2 5 < 3$$

$$T(n) = n^2 + T\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + \dots + T\left(\left\lfloor \frac{n}{2^k} \right\rfloor\right)$$

$T(n) = O(n^2)$ per ind.

$T(n) \leq c n^2 \quad c > 0$

Hp. ind. $\quad T\left(\frac{n}{2}\right) \leq c \frac{n^2}{2^2} \ldots \quad T\left(\frac{n}{2^k}\right) \leq c \frac{n^2}{2^{2k}}$

$$T(n) \leq n^2 + \underbrace{c \frac{n^2}{2} + \ldots + c \frac{n^2}{2^k}}$$

$$= n^2 \left(1 + \frac{c}{2^2} + \ldots + \frac{c}{2^{2k}} \right)$$ Serie geometrica

$$\leq n^2 \frac{c}{4} \cdot \left(\frac{1}{1 - 1/4} \right)$$

$$\boxed{\leq \sum_{i=1}^{+\infty} p = \frac{1}{1-p} \quad \text{se } |p| < 1}$$

$$= n^2 \left(1 + \frac{c}{3} \right) \leq c n^2 \qquad \boxed{c \geq 3/2}$$

ho saltato passaggi

$$n^2\left(1+\frac{c}{2^2}+\dots+\frac{c}{2^{2k}}\right)$$

$$=2n^2+n^2\left(\underbrace{\frac{c}{4}+\dots\frac{c}{4^k}}\right)$$

$$\sum_{i=1}^{k}\frac{c}{4^i}\le\sum_{i=1}^{+\infty}\frac{c}{4^i}=c\sum_{i=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^i$$