Algoritmi e Principi dell'Informatica

Appello d'esame

1 febbraio 2016

Nome:_____

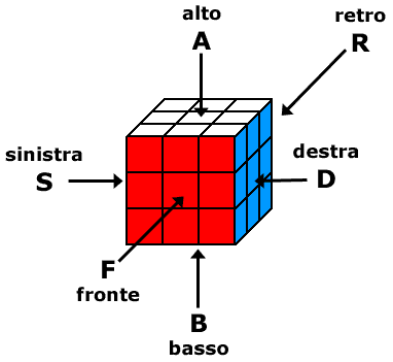
Matricola:_____

Firma:_____

Esercizio 1 (punti 7)

Si consideri un'estensione degli automi a stati finiti deterministici (come riconoscitori di linguaggi), detta *Macchina di Rubik*, in cui è presente un dispositivo di memoria basato sul famoso cubo di Rubik.

Il Cubo di Rubik (CdR). E' un cubo composto da una griglia di 3x3x3=27 cubetti, di cui, a seconda della posizione nel cubo, sono visibili 0, 1, 2 o 3 facce dette "quadretti" (vedi figura). Il CdR presenta quindi 9 quadretti su ognuna delle sue 6 facce, per un totale di 54 quadretti. I quadretti differiscono tra loro per il colore, con un totale di 6 colori differenti (**G**iallo, **B**ianco, **R**osso, **V**erde, **b**lu, **A**rancione). Ciascuna faccia può essere ruotata di 90° in senso orario o antiorario come mostrato in figura. In questo modo, il cubo può assumere oltre 10^{19} combinazioni possibili. Il cubo si dice *risolto* quando in ogni faccia i quadretti sono tutti dello stesso colore.



La Macchina di Rubik (MdR). Nella MdR (dotata di stati e transizioni come ogni automa a stati), ogni transizione è associata a una "mossa" da compiere sul cubo. Una mossa sul cubo è una rotazione di 90° di una faccia, identificata da una lettera che ne rappresenta la posizione relativa nel cubo (**A**lto, **B**asso, **D**estra, **S**inistra, **F**ronte, **R**etro) e dal senso di rotazione (orario: ↻, antiorario: ↺). Nel diagramma degli stati, ogni arco è quindi dotato di un'etichetta del tipo

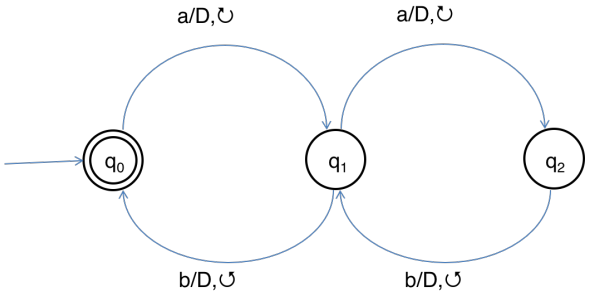
$$i \,/\, f, s$$

dove i denota un simbolo letto dall'ingresso, $f \in$ {A, B, D, S, F, R} denota una faccia, e $s \in$ {↻, ↺} denota un senso di rotazione della faccia.

La configurazione del cubo è rappresentata da una stringa di 54 simboli, 9 per faccia, ciascuno dei quali rappresenta ordinatamente il colore delle caselle della faccia. Ad esempio, la stringa $G^9B^9R^9V^9b^9A^9$ (dove G sta per giallo, B per bianco, ecc.) rappresenta un cubo risolto.

All'inizio dell'esecuzione della MdR, il cubo è risolto. Una stringa letta dal nastro di ingresso viene accettata dalla MdR se e solo se alla fine della sua scansione la macchina è in uno stato finale e <u>il cubo è risolto</u>.

1) Qual è il linguaggio L riconosciuto dalla macchina di Rubik seguente?



2) Si confronti il potere espressivo della MdR con quello degli automi visti a lezione.

Esercizio 2 (punti 5)
Si specifichi in logica del prim'ordine che ogni funzione computabile è calcolata da infinite macchine di Turing (MT). Per la specifica si può fare uso della funzione binaria *calc(i,x)* (che indica il valore calcolato dalla MT con indice *i* a fronte dell'ingresso *x*) e si possono inoltre usare i predicati di confronto tra numeri (=, >, <). Non sono ammessi altri predicati e funzioni.

Esercizio 3 (punti 4)
Si consideri il linguaggio L del punto 1 dell'Esercizio 1: è decidibile il problema di stabilire se esistano infinite macchine di Turing che riconoscono L? Spiegare brevemente la risposta.

Tracce delle soluzioni

Esercizio 1
Il linguaggio riconosciuto è (a(ab)*b)*

La MdR non è più potente degli automi a stati finiti, poiché il numero di configurazioni possibili del cubo, seppur elevato, è finito. D'altra parte, vi sono alcuni linguaggi riconosciuti dagli automi a stati finiti che non possono essere riconosciuti da una MdR. Ad esempio, il linguaggio {a} non può essere riconosciuto da una MdR. Infatti, se la stringa in ingresso è di un solo carattere, la MdR termina la sua "esecuzione" compiendo una sola mossa sul cubo; in questo modo il cubo è certamente non risolto, pertanto la stringa non può essere accettata. In conclusione, le MdR sono meno espressive degli automi a stati finiti. Il loro potere espressivo sarebbe equivalente a quello degli automi a stati finiti se, tra le mosse possibili, ci fosse anche la possibilità di non ruotare nessuna faccia sul cubo (il che consentirebbe banalmente di mantenere sempre il cubo risolto e di ignorarne la configurazione per l'accettazione).

Esercizio 2

$\forall i\ \exists j\ (j>i \wedge \forall x\ calc(i,x)=calc(j,x))$

Esercizio 3

E' decidibile ed è anche deciso. Infatti, poiché L è riconosciuto da una MdR, esso è necessariamente riconosciuto anche da un automa a stati finiti e quindi necessariamente anche da una macchina di Turing. Inoltre, è noto che, per una macchina di Turing data, ne esistono infinite altre ad essa equivalenti.