

Algoritmi e Principi dell'Informatica

Soluzioni al Tema d'esame

21 aprile 2023

Informatica teorica

Esercizio 1 (8 punti)

Per ciascuno dei linguaggi seguenti, definiti sull'alfabeto $A = \{a, b\}$, si utilizzi un formalismo a potenza minima (tra tutti quelli visti a lezione) che lo caratterizzi.

1. $L_1 = \{a^k w \mid w \in A^* \text{ e } w \text{ contiene almeno } k \text{ simboli } a, \text{ con } k \geq 1\}$.
2. $L_2 = \{a^k w \mid w \in A^* \text{ e } w \text{ contiene esattamente } k \text{ simboli } a, \text{ con } k \geq 1\}$.

SOLUZIONE

1. Tutte le stringhe corrispondenti a valori di k maggiori di 1 fanno già parte del caso $k = 1$, che pertanto è l'unico che occorra considerare. Il linguaggio è quindi $L_1 = \{aw \mid w \in A^* \text{ e } \#a(w) \geq 1\}$, che è chiaramente regolare, in quanto esprimibile mediante l'espressione regolare $a(a|b)^*a|b)^*$. Il formalismo a potenza minima per esprimere L_1 è quello della logica monadica del prim'ordine (MFO). Una formula MFO che lo esprima è la seguente:

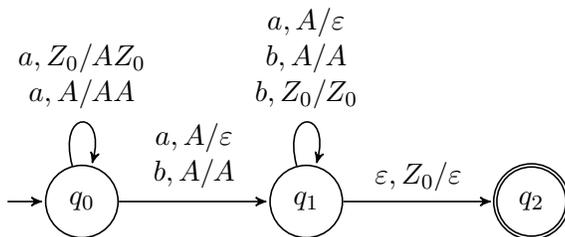
$$\exists x(\exists y(x = 0 \wedge a(x) \wedge x < y \wedge a(y))),$$

o, più semplicemente,

$$a(0) \wedge \exists x(0 < x \wedge a(x)).$$

2. L_2 non è regolare perché richiede necessariamente la capacità di contare le a in w . È pertanto necessario un automa a pila.

L'automata qui di seguito mostra una soluzione in cui stabilisce nondeterministicamente il punto preciso della sequenza in cui interrompere il conteggio dei k simboli a .



(Bonus +1 punto) Tuttavia, una più attenta analisi rivela che le condizioni del linguaggio impongono che il numero di a sia pari e che le a che appaiono dopo la prima b (se presente)

almeno 2 stringhe di lunghezza k . Una procedura che calcola la funzione semicaratteristica $c'_{\bar{S}_2}(x) = 1$ se $x \in \bar{S}_2$ altrimenti 0 agisce in maniera analoga alla c'_{S_1} descritta al punto precedente, ovvero emula diagonalmente il comportamento di \mathcal{M}_x fino a quando due computazioni su stringhe diverse, ma di lunghezza k , terminano con accettazione, nel qual caso restituisce 1.

S_3 è decidibile? Sì No

S_3 è semidecidibile? Sì No

3. L'insieme S_3 non contiene alcun indice di MT, in quanto S_2 è indecidibile, dunque non esiste alcuna MT in grado di calcolare la sua funzione caratteristica. S_3 è dunque decidibile per Rice (e quindi anche semidecidibile).