Complessità del calcolo

Dipartimento di Elettronica, Informazione e Bioingegneria
Politecnico di Milano

La complessità del calcolo

Quanto efficientemente risolviamo un problema?

- Cos'è il *costo* di una computazione?
- Come lo misuriamo?
- Primo passo: costruire strumenti per valutare la complessità di un calcolo
- Secondo passo: analisi di algoritmi e strutture dati notevoli (= risolvono problemi frequenti)
- Obiettivo: saper progettare e combinare algoritmi e strutture dati per realizzare soluzioni *efficienti* (oltre che corrette)

La complessità del calcolo

Quanto efficientemente risolviamo un problema?

- Posto che un dato problema sia risolvibile algoritmicamente, vogliamo sapere quanto ci costa risolverlo
- Effettueremo analisi *quantitative* su:
  - Tempo di calcolo impiegato
  - Spazio occupato (registri, cache, RAM, disco, nastro)
- Analisi fatta su criteri di costo oggettivi (e formalizzabili): non teniamo conto di
  - costi di sviluppo
  - trade-off ambientali tra obiettivi contrastanti...

Oltre la risolvibilità

Dipendenza dal formalismo di calcolo

- Per la tesi di Church-Turing, un problema è calcolabile o meno indipendentemente dallo strumento usato (purché Turing-equivalente)
- Possiamo dire lo stesso della complessità del calcolo?
  - Una somma in unario ha efficienza diversa da una in base $b > 1$
  - Calcolare una traduzione $y = \tau(x)$ decidendo se $\exists z \in L_\tau = \{x\$y \mid y = \tau(x)\}$ può essere molto meno efficiente del calcolare la traduzione in qualche caso.
- Non è verosimile assumere che cambiando modello di calcolo non cambi il tempo di esecuzione

Costruire uno strumento generale

Costo di calcolo "indipendente" dal formalismo

- Non abbiamo una "tesi di Church-Turing" della complessità
  - ma troveremo una sorta di "tesi di Church-Turing" della complessità
- Costruiamo uno strumento per valutare la complessità temporale e spaziale di un calcolo:
  - che tralasci "considerazioni superflue"
  - utilizzabile per la maggioranza dei modelli di calcolo
- Non avendo un formalismo di calcolo "preferito" per costruire il modello, partiamo dalle TM *deterministiche*

Complessità temporale e spaziale

Data la computazione $c_0 \vdash c_1 \vdash c_2 \vdash \ldots \vdash c_r$ di $\mathcal{M}$ (a k nastri) *deterministica*

Complessità temporale

- La complessità temporale è $T_{\mathcal{M}}(x) = r$ se $\mathcal{M}$ termina in c_r
  - ∞ se non termina
- $\mathcal{M}$ è *deterministica* $\Rightarrow$ computazione unica sull'ingresso x

Complessità spaziale

- La complessità spaziale è
  - $S_{\mathcal{M}}(x) = \sum_{j=1}^{k} \max_{i \in \{0,\ldots,r\}}(|\alpha_{ij}|)$
    - α_{ij}: contenuto del j-esimo nastro alla mossa i-esima
  - Intuitivamente: la somma delle quantità massime di nastro occupate, per ogni nastro
- NB: $\forall x \quad \frac{S_{\mathcal{M}}(x)}{k} \leq T_{\mathcal{M}}(x)$

Esempio: riconoscere $L = \{wcw^R\}$ con TM a 1 nastro

Complessità temporale

- $T_{\mathcal{M}}(x) = |x| + 1$ se $x \in L$
- $T_{\mathcal{M}}(x) = |\alpha a.ucu^R.b|$ se $x = \alpha aucu^R b\beta$
- $T_{\mathcal{M}}(x) = |x| + 1$ se $x \in \{a, b\}^*$
- $T_{\mathcal{M}}(x) = 2$ se $x \in c^+.\{a, b\}^*$
- ...

Complessità spaziale

- $S_{\mathcal{M}}(x) = \left\lfloor \frac{|x|}{2} \right\rfloor + 1$ se $x \in L$ (includendo Z_0)
- $S_{\mathcal{M}}(x) = |x| + 1$ se $x \in \{a, b\}^*$
- ...

Riducendo all'essenziale

Ci sono un po' troppi dettagli...

Una prima semplificazione

- Da $T_{\mathcal{M}}(x)$ e $S_{\mathcal{M}}(x)$ a $T_{\mathcal{M}}(n)$ e $S_{\mathcal{M}}(n)$, dove n è la "dimensione" dei dati in ingresso
  - Nel caso precedente $n = |x|$
  - Esempi pratici: righe/colonne di una matrice, numero di record in una tabella, numero di pacchetti in arrivo dalla rete
- NB: È comunque una semplificazione, perché in generale
  - $|x_1|=|x_2| \nRightarrow T_{\mathcal{M}}(x_1)=T_{\mathcal{M}}(x_2)$
  - $|x_1|=|x_2| \nRightarrow S_{\mathcal{M}}(x_1)=S_{\mathcal{M}}(x_2)$

Gestire la variabilità dell'ingresso

Scelte possibili (sia per $T_{\mathcal{M}}(.)$ che per $S_{\mathcal{M}}(.)$)

- Caso pessimo: $T_{\mathcal{M}}(n) = \max_{|x|=n} T_{\mathcal{M}}(x)$
- Caso ottimo: $T_{\mathcal{M}}(n) = \min_{|x|=n} T_{\mathcal{M}}(x)$
- Caso medio: $T_{\mathcal{M}}(n) = \frac{\sum_{|x|=n} T_{\mathcal{M}}(x)}{|\mathbf{I}|^n}$ (cioè somma dei tempi per parole lunghe n / numero di parole lunghe n)

Scelte tipiche

- Quasi sempre il caso pessimo
  - È quasi sempre il più rilevante
  - L'analisi risulta più semplice del caso medio (che dovrebbe tenere conto di ipotesi probabilistiche sulla distribuzione dei dati)

Tasso di crescita

Come crescono $T_{\mathcal{M}}(n)$ e $S_{\mathcal{M}}(n)$?

- I valori esatti di $T_{\mathcal{M}}(n)$ e $S_{\mathcal{M}}(n)$ per un dato n non sono particolarmente utili
- Ci interessa il comportamento *asintotico* delle funzioni di costo, ossia quando $n \to \infty$
  - Non distingueremo quindi $T_{\mathcal{M}}(n) = n^2 + 13n$ da $3n^2$, poiché ambedue hanno comportamenti "simili" a n^2
- Semplificazione aggressiva ($n^2 \approx 10^{80} n^2$) ma molto efficace se usata con raziocinio

Comportamento asintotico e notazione

Indicare i tassi di crescita

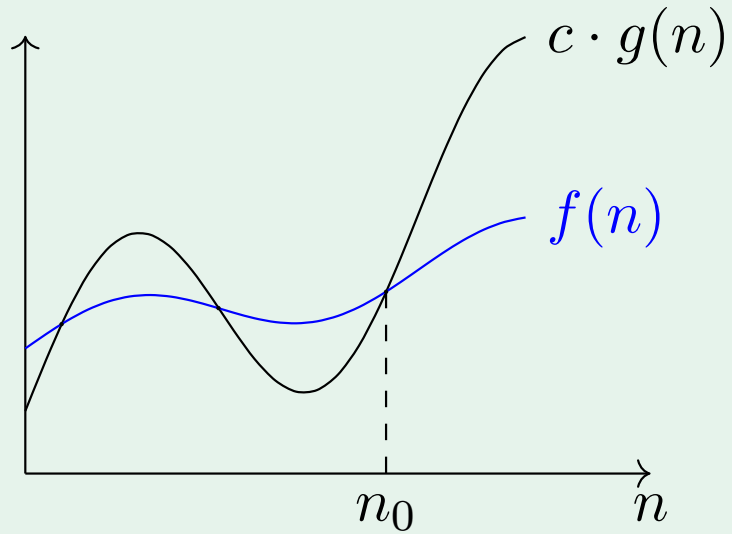
- Introduciamo una notazione per indicare il comportamento asintotico di una funzione:
  - La notazione $\mathcal{O}$-grande: limite asintotico superiore
  - La notazione Ω-grande: limite asintotico inferiore
  - La notazione Θ-grande: limite asintotico sia sup. che inf.
- NB 1: per valori piccoli di n potrebbe non essere un buon modello
- NB 2: un algoritmo con complessità asintotica maggiore può essere più veloce di uno a complessità minore per valori piccoli di n

Notazione $\mathcal{O}$-grande

Definizione

- Data una funzione $g(n)$, $\mathcal{O}(g(n))$ è l'insieme $\mathcal{O}(g(n)) = \{f(n) \mid \exists c{>}0, n_0{>}0$ tali che $\forall n > n_0,\ 0 \leq f(n) \leq c \cdot g(n)\}$

Graficamente



- Le funzioni in $\mathcal{O}(g(n))$ sono dominate da $c \cdot g(n)$ a partire da n_0

Esempi

Facilmente

- $3n^2 + 12n + 35 \in \mathcal{O}(n^2)$
- $5n^3 + 3 \in \mathcal{O}(n^3)$
- $2\log(n) + \log(\log(n)) \in \mathcal{O}(\log(n))$

Ma anche

- $3n^2 + 12n + 35 \in \mathcal{O}(n^{20})$
- $5n^3 + 3 \in \mathcal{O}(2^n)$
- $2\log(n) + \log(\log(n)) \in \mathcal{O}(n)$

Notazione comune

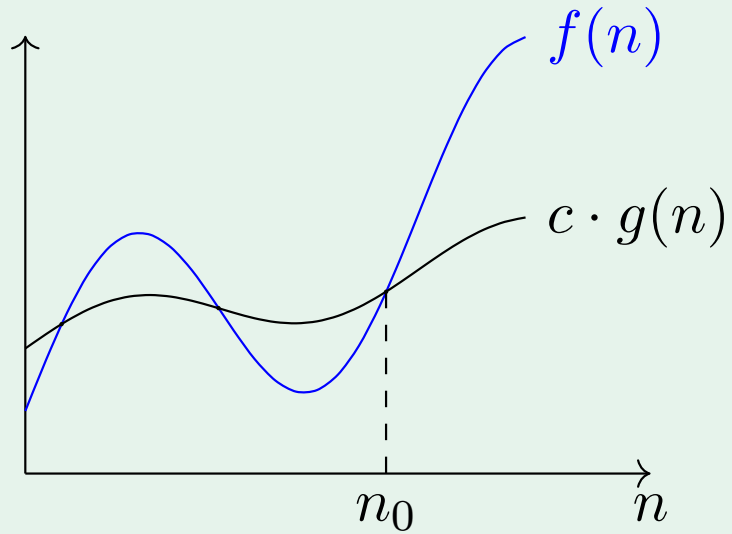
- È comune scrivere $f(n) = \mathcal{O}(g(n))$ al posto di $f(n) \in \mathcal{O}(g(n))$ (oppure $f(n)$ è $\mathcal{O}(g(n))$)

Notazione Ω-grande

Definizione

- Data una funzione $g(n)$, $\Omega(g(n))$ è l'insieme $\Omega(g(n)) = \{f(n) \mid \exists c{>}0, n_0{>}0$ tali che $\forall n > n_0,\ 0 \leq c \cdot g(n) \leq f(n)\}$

Graficamente



- Le funzioni in $\Omega(g(n))$ dominano $c \cdot g(n)$ a partire da n_0

Esempi

Direttamente dalla definizione

- $3n^2 + 12n + 35 \in \Omega(n^2)$
- $7n^2 \log(n) + 15 \in \Omega(n^2 \log(n))$
- $n2^n + n^{50} \in \Omega(n2^n)$

Di conseguenza, anche

- $3n^2 + 12n + 35 \in \Omega(n)$
- $5n^4 + 3 \in \Omega(log(n))$, ma $5n^4 + 3 \notin \Omega(n^4 log(n))$
- $n2^n + n^{13} \in \Omega(2^n)$,
- $n2^n + n^{13} \in \Omega(n^{70})$

Proprietà

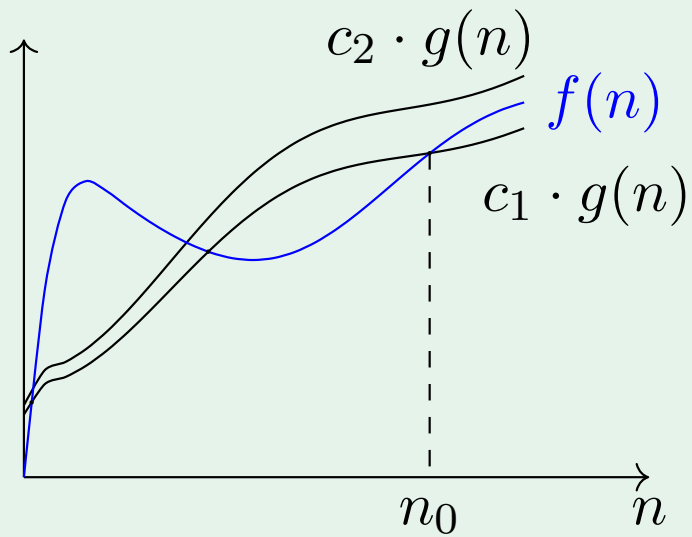
- $f(n) \in \mathcal{O}(g(n))$ se e solo se $g(n) \in \Omega(f(n))$

Notazione Θ-grande

Definizione

- Data una funzione $g(n)$, $\Theta(g(n))$ è l'insieme $\Theta(g(n)) = \{f(n) \mid \exists c_1{>}0, c_2{>}0, n_0{>}0$ tali che $\forall n > n_0,\ 0 \leq c_1 \cdot g(n) \leq f(n) \leq c_2 \cdot g(n)\}$

Graficamente



- Le funzioni in $\Theta(g(n))$ sono comprese tra $c_1 \cdot g(n)$ e $c_2 \cdot g(n)$ a partire da n_0

Esempi

Direttamente dalla definizione

- $3n^2 + 12n + 35 \in \Theta(n^2)$
- $7n^2 \log(n) + 15 \in \Theta(n^2 \log(n))$
- $n2^n + n^{50} \in \Theta(n2^n)$

Tuttavia

- $3n^2 + 12n + 35 \notin \Theta(n)$
- $3n^2 + 12n + 35 \notin \Theta(\log(n))$
- $n2^n + n^{50} \notin \Theta(2^n)$
- $n2^n + n^{50} \notin \Theta(n^{100})$

Proprietà di $\mathcal{O}, \Omega, \Theta$

Proprietà notevoli

- $f(n) \in \Theta(g(n)) \Leftrightarrow f(n) \in \mathcal{O}(g(n)) \wedge f(n) \in \Omega(g(n))$
- Transitività
  - $f(n) \in \Theta(g(n)) \wedge g(n) \in \Theta(h(n)) \Rightarrow f(n) \in \Theta(h(n))$
  - $f(n) \in \mathcal{O}(g(n)) \wedge g(n) \in \mathcal{O}(h(n)) \Rightarrow f(n) \in \mathcal{O}(h(n))$
  - $f(n) \in \Omega(g(n)) \wedge g(n) \in \Omega(h(n)) \Rightarrow f(n) \in \Omega(h(n))$
- Riflessività:
  - $f(n) \in \Theta(f(n))$
  - $f(n) \in \mathcal{O}(f(n))$
  - $f(n) \in \Omega(f(n))$
- Simmetria: $f(n) \in \Theta(g(n)) \Leftrightarrow g(n) \in \Theta(f(n))$
- Simmetria trasposta: $f(n) \in \mathcal{O}(g(n)) \Leftrightarrow g(n) \in \Omega(f(n))$
- NB: Θ è una relazione di equivalenza

Confronti operativi

Definizioni come limiti

- Se $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = c, c \neq 0, c \neq \infty$ allora $f(n) \in \Theta(g(n))$
  - Gli andamenti asintotici di f e g differiscono per una costante moltiplicativa
- Se $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$ allora $f(n) \in \mathcal{O}(g(n))$, ma $f(n) \notin \Theta(g(n))$
  - Il comportamento di $f(n)$ è diverso in modo sostanziale da quello di $g(n)$ (in particolare, $g(n)$ cresce più velocemente)
  - Si indica anche, con notazione più sintetica, $\Theta(f(n)) < \Theta(g(n))$
- L'uso della notazione $\mathcal{O}, \Omega, \Theta$ permette di evidenziare con facilità la parte più importante di una funzione di complessità

Una prima applicazione

Riconoscere $L = \{wcw^r\}$ con TM a 1 nastro

- $T_{\mathcal{M}}(n)$ è $\Theta(n)$, $S_{\mathcal{M}}(n)$ è anch'essa $\Theta(n)$
- Ci sono possibilità di miglioramento (= soluzioni a complessità inferiore)?
- Per $T_{\mathcal{M}}(n)$, è ben difficile (devo leggere tutta la stringa)
- Per $S_{\mathcal{M}}(n)$, sì. Ad esempio, con TM a 2 nastri:
  - Memorizzo solo la posizione i del carattere da confrontare (in binario)
  - Sposto la testina e confronto i caratteri in posizione i e $n - i + 1$
- NB: la complessità spaziale conteggia solamente le celle dei nastri di memoria

Pseudocodice per TM a 3 nastri $\mathtt{N}_a, \mathtt{N}_b, \mathtt{N}_c$ [complessità tra quadre]

1. Ciclo per trovare c: ad ogni passo incrementa il contatore memorizzato in base 2 in $\mathtt{N}_a$ $[n \log(n)]$
2. Ripeti fino a quando il contatore su $\mathtt{N}_a$ è $= 0$ (i va da $n/2$ a 0)
    1. Copia il contenuto di $\mathtt{N}_a$ su $\mathtt{N}_b$ $[\log(n)]$
    2. Decrementa passo passo $\mathtt{N}_b$ fino a 0 e ad ogni passo sposta verso sx la testina di ingresso $[i \log(i)]$
    3. Memorizza il carattere in un nastro $\mathtt{N}_c$ $[1]$
    4. Torna al carattere c $[i]$
    5. Copia il contenuto di $\mathtt{N}_a$ su $\mathtt{N}_b$ $[\log(n)]$
    6. Decrementa passo passo $\mathtt{N}_b$ fino a 0 e ad ogni passo sposta verso dx la testina di ingresso di $\mathtt{N}_b$ $[i \log(i)]$
    7. Confronta il carattere con quello in $\mathtt{N}_c$, se diversi halt $[1]$
    8. Decrementa $\mathtt{N}_a$ $[\log(i)]$
    9. Torna al carattere c $[i]$

Considerazioni sul $T_{\mathcal{M}}(n)$ e $S_{\mathcal{M}}(n)$

Compromessi tra spazio e tempo

- La nuova soluzione è $S_{\mathcal{M}}(n) \in \Theta(\log(n))$, ma $T_{\mathcal{M}}(n) \in \Theta(n^2 \log(n))$
- È un caso di compromesso spazio-temporale: la soluzione è più lenta ma occupa meno spazio
- Questo esempio giustifica perché in una TM a k nastri, per convenzione la testina di ingresso si muove in entrambe le direzioni
  - Farla muovere in una sola direzione non cambia il potere computazionale della TM ma impedisce esempi (non banali) di algoritmi con $S_{\mathcal{M}}(n)$ sub-lineare

Modelli di calcolo

Altri modelli *deterministici* di calcolo

- FSA: hanno sempre $S_{FSA}(n) \in \Theta(1)$, $T_{FSA}(n) \in \Theta(n)$
  - Tecnicamente, $T_{FSA}(n) = n$, leggono un carattere per mossa
- PDA: hanno sempre $S_{PDA}(n) \in \mathcal{O}(n)$, $T_{PDA}(n) \in \Theta(n)$
- TM a nastro singolo?
  - È facile trovare una soluzione $T_{\mathcal{M}}(n) \in \Theta(n^2)$ per il riconoscimento di $L = \{wcw^r\}$
  - $S_{\mathcal{M}}(n)$ non potrà mai essere minore di $\Theta(n)$
    - Ecco perché le TM a k nastri sono il modello principale
  - Non esiste un algoritmo più efficiente di $T_{\mathcal{M}}(n) \in \Theta(n^2)$ (Dimostrazione complessa. Intuizione: a ogni controllo di ognuna delle $\frac{n-1}{2}$ coppie di lettere, la TM scandisce una porzione di nastro che passa su c)
- In generale: TM a nastro singolo sono più potenti dei PDA, ma talvolta meno efficienti!

I teoremi di accelerazione lineare

Teorema

Se L è accettato da una TM $\mathcal{M}$ a k nastri in $S_{\mathcal{M}}(n)$, per ogni $c \in \mathbb{R}^+$ posso costruire una TM $\mathcal{M}'$ a k nastri che accetta L con $S_{\mathcal{M}'}(n) < c \cdot S_{\mathcal{M}}(n)$

Schema della dimostrazione

- Scelgo un fattore di compressione r tale che $r \cdot c > 2$
- Per ogni alfabeto Γ_i dell'i-esimo nastro di $\mathcal{M}$ costruisco Γ'_i di $\mathcal{M}'$ assegnando un elemento per ogni $s \in \Gamma_i^r$
- Costruisco l'organo di controllo di $\mathcal{M}'$ in modo tale per cui:
  - Calcoli con i nuovi simboli sui nastri emulando le mosse di $\mathcal{M}$ spostando le testine sui nastri ogni r movimenti di $\mathcal{M}$
  - Memorizzi la posizione della testina arricchendo ulteriormente gli alfabeti di nastro Γ_i oppure arricchendo l'insieme degli stati

I teoremi di accelerazione lineare - 2

Teorema

Se L è accettato da una TM $\mathcal{M}$ a k nastri in $S_{\mathcal{M}}(n)$, posso costruire una TM $\mathcal{M}'$ a 1 nastro (non nastro singolo) che accetta L con $S_{\mathcal{M}'}(n) = S_{\mathcal{M}}(n)$ (concateno i contenuti dei k nastri su uno solo)

Teorema

Se L è accettato da una TM $\mathcal{M}$ a k nastri in $S_{\mathcal{M}}(n)$, per ogni $c \in \mathbb{R}^+$ posso costruire una TM $\mathcal{M}'$ a 1 nastro che accetta L con $S_{\mathcal{M}'}(n) < c \cdot S_{\mathcal{M}}(n)$ (come sopra + compressione)

I teoremi di accelerazione lineare - 3

Teorema

Se L è accettato da una TM $\mathcal{M}$ a k nastri in $T_{\mathcal{M}}(n)$, per ogni $c \in \mathbb{R}^+$ posso costruire una TM $\mathcal{M}'$ a $k+1$ nastri che accetta L con $T_{\mathcal{M}'}(n) = \max(n+1, c \cdot T_{\mathcal{M}}(n))$ (come sopra + compressione)

Schema di dimostrazione

- Approccio simile alla complessità spaziale: codifichiamo in modo compresso i simboli dell'alfabeto di $\mathcal{M}$
- Dobbiamo considerare che la compressione è fatta a runtime: minima $T_{\mathcal{M}'}(n)$ lineare
- Comprimendo r simboli in uno, nel caso pessimo, possono servirmi 3 mosse di $\mathcal{M}'$ per emularne $r+1$ di $\mathcal{M}$

Conseguenze pratiche

L'unico "pasto gratis" è lo speedup lineare

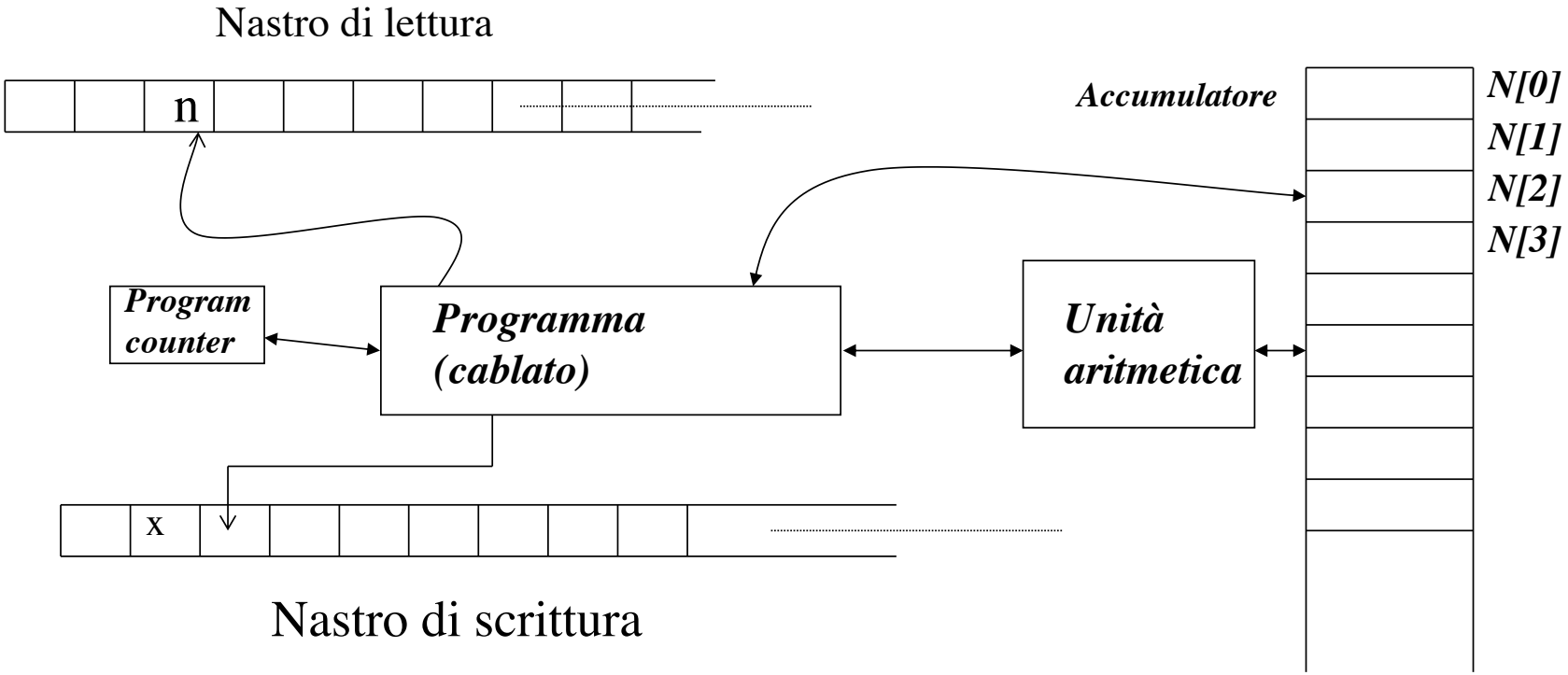
- Lo schema di dimostrazione usato per le TM vale anche per il modello di calcolatore di Von Neumann
  - Equivale a cambiare la dimensione della parola della macchina (ad esempio, da 32 a 64 bit)
- Possiamo avere speedup *lineari* arbitrariamente grandi, aumentando il parallelismo fisico (stanti i limiti della termodinamica/trasmissione dei segnali)
- Miglioramenti più che lineari nel tempo di calcolo possono essere ottenuti solo *cambiando algoritmo*
  - Concepire/utilizzare algoritmi efficienti è di gran lunga più efficace della forza bruta

Modelli di calcolo a confronto

TM vs. calcolatori reali

- Differenze "marginali": un calcolatore è in grado di fare operazioni aritmetiche su tipi a dimensione finita in tempo costante (e.g., `add` in un ciclo di clock), mentre la TM richiede di propagare gli effetti al singolo bit uno per uno
  - Il calcolatore opera con un alfabeto molto vasto, $|\mathbf{I}| = 2^w$, dove w è la sua dimensione di parola
- Un calcolatore può accedere direttamente ad una cella di memoria, una TM impiega $\Theta(n)$ dove n è la distanza della stessa dalla posizione della testina
- Cambiamo modello di calcolo, avvicinandoci ai calcolatori reali

La macchina RAM



La macchina RAM

Un calcolatore semplificato

- La macchina RAM è dotata di un nastro di lettura `In` e uno di scrittura `Out` come la TM
- Assumiamo che il programma sia cablato nell'organo di controllo, così come la logica del program counter
- La RAM è dotata di una memoria con accesso a indirizzamento diretto $\mathtt{N}[n], n \in \mathbb{N}$ al posto dei nastri di memoria: l'accesso non necessita di scorrimento delle celle
- Le istruzioni di un programma usano normalmente come sorgente il primo operando e come destinazione $\mathtt{N}[0]$
- Ogni cella contiene *un intero*

La macchina RAM

Instruction set e semantica pseudo-RTL

Istruzione	Semantica
`LOAD X`	$\mathtt{N}[0] \leftarrow \mathtt{N}[X]$
`LOAD= X`	$\mathtt{N}[0] \leftarrow X$
`LOAD* X`	$\mathtt{N}[0] \leftarrow \mathtt{N}[\mathtt{N}[X]]$
`STORE X`	$\mathtt{N}[X] \leftarrow \mathtt{N}[0]$
`STORE* X`	$\mathtt{N}[\mathtt{N}[X]] \leftarrow \mathtt{N}[0]$
`ADD X`	$\mathtt{N}[0] \leftarrow \mathtt{N}[0] + \mathtt{N}[X]$
`SUB X`	$\mathtt{N}[0] \leftarrow \mathtt{N}[0] - \mathtt{N}[X]$
`MUL X`	$\mathtt{N}[0] \leftarrow \mathtt{N}[0] \times \mathtt{N}[X]$
`DIV X`	$\mathtt{N}[0] \leftarrow \mathtt{N}[0]/\mathtt{N}[X]$
`ADD= X`	$\mathtt{N}[0] \leftarrow \mathtt{N}[0] + X$
$\vdots$	

Istruzione	Semantica
`READ X`	$\mathtt{N}[X] \leftarrow \mathtt{In}$
`READ* X`	$\mathtt{N}[\mathtt{N}[X]] \leftarrow \mathtt{In}$
`WRITE X`	$\mathtt{Out} \leftarrow \mathtt{N}[X]$
`WRITE= X`	$\mathtt{Out} \leftarrow X$
`WRITE* X`	$\mathtt{Out} \leftarrow \mathtt{N}[\mathtt{N}[X]]$
`JUMP l`	$\mathtt{PC} \leftarrow l$
`JZ l`	$\mathtt{PC} \leftarrow l$ se $\mathtt{N}[0] = 0$
`JGZ l`	$\mathtt{PC} \leftarrow l$ se $\mathtt{N}[0] > 0$
`JLZ l`	$\mathtt{PC} \leftarrow l$ se $\mathtt{N}[0] < 0$
`HALT`	–

Test (semplice) di primalità in assembly RAM

Funzione `isPrime`(n) = `if` n is prime `then 1 else 0`

```
 1          READ 1      il valore di ingresso n è memorizzato in N[1]
 2          LOAD= 1     Se n = 1, esso banalmente non è primo
 3          SUB 1
 4          JZ no
 5          LOAD= 2     N[2] è inizializzato a 2
 6          STORE 2
 7  loop:   LOAD 1      Se N[1] = N[2] allora n è primo
 8          SUB 2
 9          JZ yes
10          LOAD 1      Se N[1] = (N[1] DIV N[2]) · N[2] allora
11          DIV 2       N[2] è un divisore di N[1];
12          MUL 2       quindi N[1] non è primo
13          SUB 1
14          JZ no
15          LOAD 2      N[2] è incrementato di 1 e il ciclo viene ripetuto
16          ADD= 1
17          STORE 2
18          JUMP loop
19   yes:   WRITE= 1
20          HALT
21    no:   WRITE= 0
22          HALT
```

Complessità del precedente programma

Analisi temporale

- Assunzione di base: istruzioni singole a costo costante c_i, dove i è l'indice della riga
- Le istruzioni 1 – 6 sono eseguite al più una volta $\rightarrow$ costo $= c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + c_5 + c_6$, è una costante k_1
- Analogamente per le istruzioni 19 – 22, costo costante k_3
- Le istruzioni 7 – 18 hanno costo costante k_2, ma sono eseguite, nel caso pessimo n volte
- $T_{RAM}(n) = k_1 + nk_2 + k_3 = \Theta(n)$
- $S_{RAM}(n) = 3 = \Theta(1)$ (uso solo 3 celle di mem)
- N.B.: questa volta n non è la lunghezza dell'ingresso!

Analisi di altri algoritmi

Riconoscere $L = \{wcw^R\}$

- $T_{RAM}(n) = \Theta(n)$
- $S_{RAM}(n) = \Theta(n)$

Ricerca Binaria

- Input: una sequenza ordinata di interi, ed un numero da cercare in essa
- Output: 1 se l'elemento cercato esiste nella sequenza, 0 altrimenti

Ricerca Binaria: codice (parte 1)

Assunzioni: sequenza già caricata in memoria

- $\mathtt{N}[1]=$ indirizzo della prima cella della sequenza; $\mathtt{N}[2] =$ numero di elementi; quindi la sequenza va dalla cella $\mathtt{N}[\mathtt{N}[1]]$ alla cella $\mathtt{N}[\mathtt{N}[1] + \mathtt{N}[2] - 1]$

```
 1          READ 3     L'elemento da cercare è letto e memorizzato in N[3]
 2          LOAD 1
 3          STORE 4    N[4] è inizializzato con l'indirizzo del primo numero
 4          ADD 2
 5          SUB= 1
 6          STORE 5    N[5] è inizializzato con l'indirizzo dell'ultimo numero
 7  loop:   LOAD 5     Se l'indirizzo di N[5] precede quello di N[4] siamo
 8          SUB 4      giunti ad avere una porzione di sequenza che è vuota,
 9          JLZ no     quindi l'elemento cercato non esiste
10          LOAD 5
11          ADD 4
12          DIV= 2
13          STORE 6    N[6] contiene ora l'indirizzo dell'elemento centrale
14          LOAD* 6
15          SUB 3
```

Ricerca Binaria: codice (parte 2)

```
16          JZ yes      Se N[3] = N[N[6]] l'elemento cercato esiste
17          JGZ fst     Se N[3] < N[N[6]] cerca nella prima metà
18          JUMP snd    Se N[3] > N[N[6]] cerca nella seconda metà
19   fst:   LOAD 6
20          SUB= 1
21          STORE 5     Memorizza N[6] − 1 in N[5]
22          JUMP loop
23   snd:   LOAD 6
24          ADD= 1
25          STORE 4     Memorizza N[6] + 1 in N[4]
26          JUMP loop
27   yes:   WRITE= 1
28          HALT
29    no:   WRITE= 0
30          HALT
```

Il ciclo viene eseguito al più $\log_2(n)$ volte, per una sequenza di n elementi, in quanto ogni volta la dimensione dell'array viene dimezzata. Costo complessivo:

$T_{RAM}(n) = \Theta(\log(n)) < \Theta(n) \leq T_{TM}(n)$

Limiti del criterio di costo

Numeri molto grandi

- Consideriamo il caso del calcolo di 2^{2^n} con una RAM
- Uno schema di implementazione possibile è

```
read(n);
x=2;
for(int i=0; i< n; i++) x = x*x;
write(x);
```

- Che complessità temporale ha l'implementazione qui sopra?
  $T_{RAM}(n) = k_1 + k_2 + nk_3 + k_4 = \Theta(n)$
- Qualcosa non va: mi servono 2^n bit solo per scrivere il risultato!

Un criterio di costo più preciso

Quando contare i singoli bit

- Il criterio di costo precedente considera un intero arbitrario di dimensione costante
  - È una semplificazione: “1” è più corto di “1000000”
- L’approssimazione regge fin quando una singola parola della macchina reale contiene gli interi che maneggiamo
- Se questo non accade, dobbiamo tenere conto del numero di cifre necessarie per rappresentare un intero
  - Caricare e salvare interi non è più a costo costante
  - Le operazioni elementari (somma, prodotto...) neppure

Criterio di costo logaritmico

Quando contare i singoli bit

- Copiare/spostare/scrivere/leggere un intero i costa tanto quanto il suo numero di cifre in base b: $\log_b(i) = \Theta(\log(i))$
  - Con $b = 2$ il costo è il numero di bit usati per rappresentare i
- Il costo delle operazioni aritmetico/logiche elementari dipende dall'operazione (definiamo $d = \log_2(i)$)
  - Addizioni, sottrazioni, op. al bit $\Theta(d)$
  - Moltiplicazioni e divisioni: metodo scolastico $\Theta(d^2)$
    - ma esistono algoritmi molto più efficienti
- I salti incondizionati e la `HALT` sono a costo costante

Tabella dei costi logaritmici

`LOAD= x`	$\log(x)$
`LOAD x`	$\log(x) + \log(\mathtt{N}[x])$
`LOAD* x`	$\log(x) + \log(\mathtt{N}[x]) + \log(\mathtt{N}[\mathtt{N}[x]])$
`STORE x`	$\log(x) + \log(\mathtt{N}[0])$
`STORE* x`	$\log(x) + \log(\mathtt{N}[x]) + \log(\mathtt{N}[0])$
`ADD= x`	$\log(\mathtt{N}[0]) + \log(x)$
`ADD x`	$\log(\mathtt{N}[0]) + \log(x) + \log(\mathtt{N}[x])$
`ADD* x`	$\log(\mathtt{N}[0]) + \log(x) + \log(\mathtt{N}[x]) + \log(\mathtt{N}[\mathtt{N}[x]])$
`...`	
`READ x`	$\log(\text{valore input corrente}) + \log(x)$
`READ* x`	$\log(\text{valore input corrente}) + \log(x) + \log(\mathtt{N}[x])$
`WRITE= x`	$\log(x)$
`WRITE x`	$\log(x) + \log(\mathtt{N}[x])$
`WRITE* x`	$\log(x) + \log(\mathtt{N}[x]) + \log(\mathtt{N}[\mathtt{N}[x]])$
`JUMP`	1
`JGZ`	$\log(\mathtt{N}[0])$
`JZ`	$\log(\mathtt{N}[0])$
`HALT`	1

Test di primalità con criterio logaritmico

Solo i punti essenziali, MUL e DIV scolastiche

7	loop:	LOAD 1	$\log(1) + \log(n)$
8		SUB 2	$\log(n) + \log(2) + \log(\mathtt{N}[2])$
9		JZ yes	$\log(\mathtt{N}[0])$
10		LOAD 1	$\log(1) + \log(n)$
11		DIV 2	$\log((n))^2 + \log(2) + \log((\mathtt{N}[2]))^2$
12		MUL 2	$\log((n/\mathtt{N}[2]))^2 + \log(2) + \log((\mathtt{N}[2]))^2 < (\log(n))^2$
13		SUB 1	$\log(\mathtt{N}[0]) + \log(1) + \log(n) < 2\log(n)$
14		JZ no	$\leq \log(n)$
15		LOAD 2	$\leq \log(n) + k$
16		ADD= 1	...
17		STORE 2	
18		JUMP loop	

- Si può facilmente maggiorare la singola iterazione del ciclo con $\Theta((\log(n))^2)$
- Ergo la complessità temporale complessiva è $\Theta(n(\log(n))^2)$

Calcolo di 2^{2^n}, complessità a costo logaritmico

Analisi di caso pessimo, MUL scolastica, indicati solo costi prevalenti

1		`READ 2`	$\log(n)$
2		`LOAD= 2`	$\log(2) = k$
3		`STORE 1`	$\log(2) = k$
4	`loop:`	`LOAD 1`	$\log(2^{2^{n-1}}) = 2^{n-1}$
5		`MUL 1`	$(\log(2^{2^{n-1}}))^2 = (2^{n-1})^2 = 2^{2n-2}$
6		`STORE 1`	$\log(2^{2^n}) = 2^n$
7		`LOAD 2`	$\log(n)$
8		`SUB= 1`	$\log(n)$
9		`STORE 2`	$\log(n-1) \leq \log(n)$
10		`JGZ loop`	$\log(n-1) \leq \log(n)$
11		`WRITE 1`	$\log(2^{2^n}) = 2^n$
12		`HALT`	1

$$T_{RAM}(n) = \mathcal{O}(\log(n) + n(2^{n-1} + 2^{2n-2} + 2^n + 3\log(n)) + 2^n) = \mathcal{O}(n2^{2n-2})$$

...possiamo scriverlo meglio?

Rapporti tra criteri di costo

Rianalizzando

- Riconoscere $L = \{wcw^R\}$ è $\Theta(n \log(n))$ (colpa del contatore)
  - Peggio della macchina di Turing! (Avevo $\Theta(n)$)
  - e con la RAM non si può fare di meglio!
- Ricerca binaria: $\Theta(\log(n)^2)$ (colpa degli indici)

Alcune ipotesi

- Che relazione intercorre tra il costo a criterio di costo costante (c_{cost}) e il costo a criterio di costo logaritmico (c_{log})?
  - $c_{log} = c_{cost} \cdot \log(n)$?
  - $c_{log} = c_{cost} \cdot \log(c_{cost})$?
- Spesso ma non sempre:
  - Per il calcolo di 2^{2^n} abbiamo un $c_{log} \geq 2^n$
    - infatti complessità temporale $\geq$ complessità spaziale, che qui è $\Theta(2^n)$

Scelta del criterio di costo

Quale criterio scegliere?

- Occorre utilizzare il buon senso!
- Se
  - l'elaborazione non altera l'ordine di grandezza dei dati di ingresso
  - la memoria allocata inizialmente (staticamente?) può non variare a run-time
  - quindi non dipende dai dati
  - e quindi una singola cella è considerabile elementare e con essa le operazioni relative
  - cioè la dimensione di ogni singolo elemento in ingresso non varia significativamente nell'esecuzione dell'algoritmo (= stesso numero di cifre per tutta l'esecuzione)

  allora va bene il criterio di costo costante
- Altrimenti (fattoriale, 2^{2^n}, ...) è indispensabile il criterio di costo logaritmico: l'unico "garantito"!

Rapporti tra complessità con diversi modelli di calcolo

Modelli di calcolo diversi $\rightarrow$ diversa efficienza

- Risolvere lo stesso problema con macchine diverse può dare luogo a complessità diverse
  - Ricerca binaria $\rightarrow$ accesso diretto
  - Riconoscimento $wcw^R \rightarrow$ accesso e memorizzazione sequenziale
- Non esiste un modello migliore in assoluto
- Non esiste nemmeno un analogo della tesi di Church per la complessità, però...
- E' possibile stabilire almeno una relazione – di maggiorazione – a priori tra le complessità di diversi modelli di calcolo.

"Teorema" (tesi) di correlazione polinomiale

(in analogia con la tesi di Church)

- Sotto "ragionevoli" ipotesi di criteri di costo,
  - NB Il criterio di costo costante per la RAM non è "ragionevole" in assoluto!

  se un problema è risolvibile mediante il modello $\mathcal{M}_1$ con complessità (spaziale o temporale) $C_1(n)$, allora è risolvibile da un qualsiasi altro modello (Turing-equivalente) $\mathcal{M}_2$ con complessità $C_2(n) \leq \pi(C_1(n))$, dove $\pi(\cdot)$ è un opportuno polinomio
  - E' una sorta di analogo della tesi di Church-Turing per la complessità, che stabilisce una relazione (di maggiorazione) a priori tra diversi modelli di calcolo
- Dimostriamo il teorema (non più *tesi*!) di correlazione (temporale) polinomiale tra TM e RAM

Correlazione temporale tra TM a k nastri e RAM

RAM simula TM a k nastri: simulazione delle azioni

- Mappiamo la TM sulla RAM:
  - Stato della TM $\rightarrow$ Prima cella di memoria della RAM
  - Una cella RAM per ogni cella del nastro
  - Suddividiamo la restante memoria della RAM in blocchi da k celle
- Riempiamo i blocchi con questa strategia:
  - Blocco 0: posizione delle k testine
  - Blocco n, $n > 0$: n-esimo simbolo di ognuno dei k nastri
- La RAM emula la lettura di un carattere sotto la testina con un accesso indiretto, usando l'indice contenuto nel blocco 0

Correlazione temporale tra TM a k nastri e RAM

RAM simula TM a k nastri: lettura

- Lettura del blocco 0 e dello stato ($\Theta(k)$ mosse)
- Lettura dei valori sui nastri in corrispondenza delle testine ($\Theta(k)$ accessi indiretti)

RAM simula TM a k nastri: Scrittura

- Scrittura dello stato ($\Theta(1)$)
- Scrittura delle celle dei nastri ($\Theta(k)$ accessi indiretti)
- Scrittura nel blocco 0 per aggiornare le posizioni delle k testine ($\Theta(k)$)

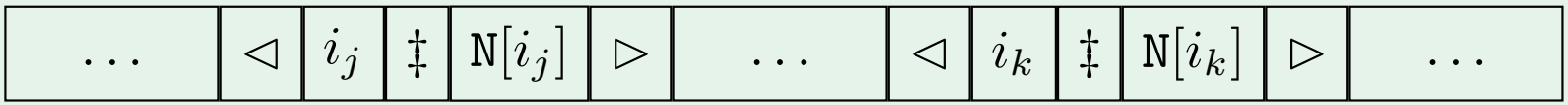
Complessità dell'emulazione

- RAM emula una mossa della TM con $\Theta(k)$ mosse:
  - $T_{RAM}(n) = \Theta(T_{\mathcal{M}}(n))$ (costo costante)
  - $T_{RAM}(n) = \Theta(T_{\mathcal{M}}(n) \log(T_{\mathcal{M}}(n)))$ (costo logaritmico)
    - un accesso indiretto a i costa $\log(i)$

Correlazione temporale tra TM a k nastri e RAM

TM a k nastri simula RAM (senza MUL/DIV per semplicità)

- Organizziamo un nastro della TM così:



- Il nastro è inizialmente vuoto: salviamo solo le celle in cui è avvenuta una STORE
- i_j e $\mathtt{N}[i_j]$ sono rappresentati in codifica binaria
- Usiamo un ulteriore nastro per contenere $\mathtt{N}[0]$ in binario
- Usiamo un ultimo nastro (di *servizio*) per consentirci di spostare dati quando dobbiamo salvare per la prima volta $\mathtt{N}[i_j]$ ma $\mathtt{N}[i_k]$ e $\mathtt{N}[i_l]$, $i_k < i_j < i_l$, sono state già salvate

Correlazione temporale tra TM a k nastri e RAM

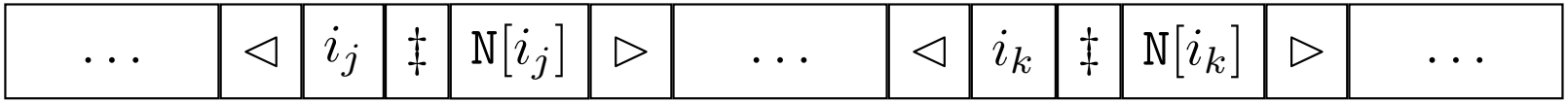
TM a k nastri simula RAM: simulare istruzioni

- `LOAD x`: cerco x sul nastro principale, copio la porzione accanto nella zona dati di $\mathtt{N}[0]$ usando il nastro di supporto
- `STORE x`: cerco x sul nastro principale:
  - Se lo trovo, salvo il valore di $\mathtt{N}[0]$ in $\mathtt{N}[x]$
    - questo può richiedere l'uso del nastro di servizio se il numero di celle già occupate non è uguale
  - Altrimenti, creo dello spazio usando il nastro di servizio se necessario e salvo
- `ADD x`: cerco x, copio $\mathtt{N}[x]$ sul nastro di supporto, calcolo la somma scrivendo direttamente in $\mathtt{N}[0]$
- In generale: simulare una mossa della RAM richiede alla TM un numero di mosse $\leq c \cdot$ (lunghezza del nastro principale), con c costante opportuna

Correlazione temporale tra TM a k nastri e RAM

Lemma (Occupazione sul nastro principale)

Lo spazio occupato sul nastro principale è $\mathcal{O}(T_{RAM}(n))$



Dimostrazione.

- Ogni cella i_j-esima della RAM occupa $\log(i_j) + \log(\mathtt{N}[i_j]) + 3$
- Ogni cella della RAM viene materializzata solo se la RAM effettua una `STORE`
- La `STORE` costa alla RAM $\log(i_j) + \log(\mathtt{N}[i_j])$
- Per riempire r celle la RAM impiega un tempo ($\leq T_{RAM}(n)$) almeno proporzionale a $\sum_{j=1}^{r} \log(i_j) + \log(\mathtt{N}[i_j])$
  - come lo spazio che occupano sul nastro della TM ■

Correlazione temporale tra TM a k nastri e RAM

Concludendo

- La TM impiega al più $\Theta(T_{RAM}(n))$ per simulare una mossa della RAM
- Se la RAM ha complessità $T_{RAM}(n)$ essa effettua al più $T_{RAM}(n)$ mosse (ogni mossa costa almeno 1)
  - a costo costante sono esattamente $T_{RAM}(n)$, a costo logaritmico sono di meno
- La simulazione completa della RAM da parte della TM costa al più $\Theta((T_{RAM}(n))^2)$; il legame tra $T_{RAM}(n)$ e $T_{TM}(n)$ è polinomiale

Impatto della tesi di correlazione polinomiale

Osservazioni

- E' vero che i polinomi possono anche essere n^{1000}, ma è sempre meglio dell'"abisso" esponenziale (n^c contro 2^n)
- Grazie al teorema di correlazione polinomiale possiamo parlare della classe dei problemi risolvibili in tempo/spazio polinomiale
  - la classe non dipende dal modello adottato
- Si è quindi da tempo adottata l'analogia:
  - classe dei problemi "trattabili" in pratica = classe dei problemi risolvibili in tempo polinomiale (P)
  - La teoria include in P anche i problemi con complessità n^{1000} (sempre meglio di quelli a complessità esponenziale)
  - in pratica i problemi di interesse applicativo (ricerche, cammini, ottimizzazioni, ...) che sono in P hanno anche grado del polinomio accettabile

Puntualizzazioni

e avvertimenti

- Attenzione al parametro di dimensione dei dati:
  - lunghezza della stringa di ingresso (valore assoluto)
  - valore del dato (n)
  - numero di elementi di una tabella, di nodi di un grafo, di righe di una matrice, ...
  - ...
  - tra tali valori sussistono certe relazioni, ma non sempre esse sono lineari (il numero n richiede una stringa di ingresso di lunghezza $log(n)$)
- La ricerca binaria implementata con una TM viola il teorema di correlazione polinomiale??
  - Attenzione all'ipotesi: riconoscimento di linguaggio $\rightarrow$ dati non già in memoria $\rightarrow$ complessità almeno lineare