Modelli per i linguaggi

Modelli adeguati per riconoscere/accettare, tradurre, calcolare linguaggi

- "Ricevono" una stringa di ingresso e la elaborano

- Modelli operazionali

(Automi)

Modelli adeguati per descrivere come generare un linguaggio

- Insiemi di regole per costruire le frasi di un linguaggio

- Modelli generativi

(Grammatiche)

Grammatiche (1)

- I modelli generativi producono stringhe
  - grammatica (o sintassi)
- Una grammatica è un insieme di regole per costruire le frasi di un linguaggio
  - Si applica a qualunque nozione di linguaggio
- Una grammatica formale genera stringhe di un linguaggio attraverso un processo di riscrittura

Riscrittura

- La riscrittura è importante in molti campi
  - Matematica
  - Informatica
  - Logica
- Consiste di un insieme di metodi per sostituire sotto-parti di una formula con altre parti
  - Potenzialmente non deterministica

Esempi

- Formule semanticamente equivalenti nella logica proposizionale
  - $A \wedge B$ può essere sostituito da $\neg(\neg A \vee \neg B)$
  - $\neg A \vee B$ può essere sostituito da $A \Rightarrow B$
  - …
- Esempi di tautologie in FOL
  - Possiamo riscrivere la tautologia $\neg A \vee A$ sostituendo A con una formula ben formata della logica proposizionale o di FOL

Regole linguistiche (1)

- I linguaggi naturali sono spiegati tramite regole quali:
  - Un periodo è composto da una o più proposizioni collegate da congiunzioni o punteggiatura
  - Una proposizione è composta da un soggetto, un predicato ed eventuali complementi
  - Il soggetto può essere un nome, un pronome, o …
- I linguaggi di programmazione sono espressi in modo simile:
  - Un programma consiste di una parte dichiarativa e una esecutiva
  - La parte esecutiva consiste di una sequenza di istruzioni
  - Un'istruzione può essere …

Regole linguistiche (2)

- In generale, una regola linguistica descrive un "oggetto principale"
  - Esempi: un libro, un programma, un messaggio, …

  come una sequenza di "componenti"
- Ogni "componente" è "raffinato" sostituendolo con componenti più dettagliati, e così via… fino ad ottenere una sequenza di elementi di base

Grammatiche (2)

- Una grammatica è una regola linguistica
- E' composta da
  - oggetto principale: il simbolo iniziale
  - componenti: i simboli non terminali
  - elementi di base: simboli terminali
  - regole di raffinamento: produzioni
- Formalmente?

Citazioni

"A grammar can be regarded as a device that enumerates the sentences of a language"

"A grammar of *L* can be regarded as a function whose range is exactly *L*"

– Noam Chomsky, *On Certain Formal Properties of Grammars*, Information and Control, Vol 2, 1959

Definizione

- Una grammatica è una tupla $<V_N, V_T, P, S>$ in cui
  - V_N è l'alfabeto non terminale
  - V_T è l'alfabeto terminale
  - $V=V_N \cup V_T$
  - $S \in V_N$ è un particolare elemento di V_N chiamato assioma o simbolo iniziale
  - $P \subseteq V^* \cdot V_N \cdot V^* \times V^*$ è l'insieme (finito) di regole di riscrittura o produzioni
- Una grammatica $G=<V_N, V_T, P, S>$ genera un linguaggio sull'alfabeto V_T

Produzioni

- Una produzione è un elemento di $V^* \cdot V_N \cdot V^* \times V^*$
  - Ossia una coppia $<\alpha, \beta>$, dove $\alpha \in V^* \cdot V_N \cdot V^*$ e $\beta \in V^*$
- Generalmente indichiamo una produzione come $\alpha \rightarrow \beta$
  - α è una sequenza di simboli che includono almeno un simbolo non terminale
  - β è una sequenza (potenzialmente vuota) di simboli (terminali o non terminali)

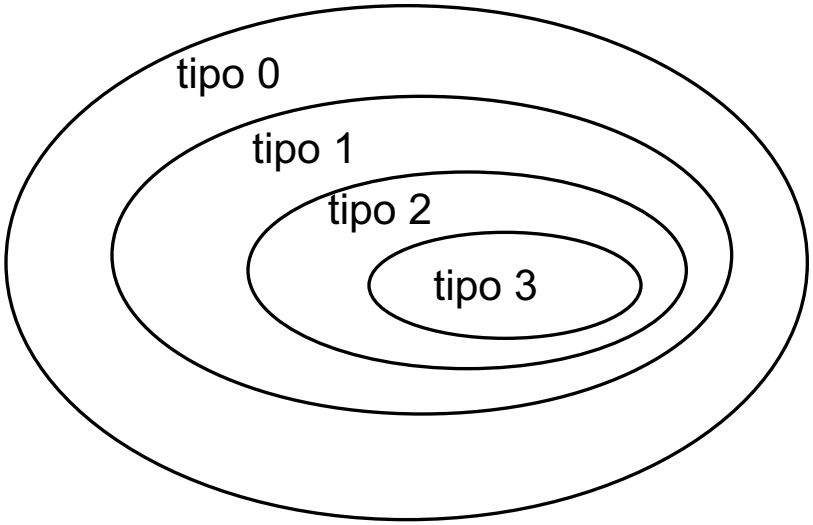
Esempio

- $V_N = \{S, A, B, C, D\}$
- $V_T = \{a,b,c\}$
- S è il simbolo iniziale
  - Non è obbligatorio che si chiami S
- P = { $S \rightarrow AB$,
  $BA \rightarrow cCD$,
  $CBS \rightarrow ab$,
  $A \rightarrow \varepsilon\}$

→ Il linguaggio generato è sull'alfabeto {a,b,c}

Gerarchia di Chomsky (1)

- Le grammatiche sono classificate a seconda dalla forma delle loro produzioni
- Chomsky ha classificato le grammatiche in 4 tipi



Gerarchia di Chomsky (2)

- Le grammatiche di tipo 3 restringono le produzioni a un singolo non terminale a sinistra; a destra c'è un singolo terminale, eventualmente seguito (o preceduto, ma non entrambe le cose nella stessa grammatica) da un singolo non terminale
  - La regola $S \rightarrow \varepsilon$ è consentita se S non appare a destra in nessuna regola
- Le grammatiche di tipo 2 hanno regole della forma $A \rightarrow \gamma$ dove A è un non terminale e γ è una stringa di terminali e non terminali

Gerarchia di Chomsky (3)

- Le grammatiche di tipo 1 hanno regole della forma $\alpha A \beta \rightarrow \alpha \gamma \beta$, dove A è un non terminale e α, β e γ sono stringhe di terminali e non terminali.
  - γ dev'essere non vuota
  - La regola $S \rightarrow \varepsilon$ è consentita se S non appare a destra in nessuna regola
- Le grammatiche di tipo 0 includono tutte le grammatiche formali

Relazione di derivazione immediata

$\alpha \Rightarrow \beta$ (β è ottenuta da α mediante derivazione immediata)

- $\alpha \in V^* \cdot V_N \cdot V^*$ e $\beta \in V^*$

se e solo se

$\alpha = \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$, $\beta = \alpha_1 \beta_2 \alpha_3$ e $\alpha_2 \rightarrow \beta_2 \in P$

→ α_2 è riscritta come β_2 nel contesto $<\alpha_1, \alpha_3>$

Esempio

Nella grammatica G

- $V_N = \{S, A, B, C, D\}$
- $V_T = \{a,b,c\}$
- S è il simbolo iniziale
- $P = \{S \rightarrow AB, BA \rightarrow cCD, CBS \rightarrow ab, A \rightarrow \varepsilon\}$

- $aa\mathbf{BA}S \Rightarrow aa\mathbf{cCD}S$
- $bc\mathbf{CBS}Add \Rightarrow bc\mathbf{ab}Add$

Linguaggio generato da una grammatica

- Data una grammatica $G=<V_N, V_T, P, S>$

  $\forall x (x \in L(G) \Leftrightarrow x \in V_T^* \wedge S \Rightarrow^+ x)$

- Informalmente il linguaggio generato da una grammatica G è l'insieme di tutte le stringhe
  - che consistono di soli simboli terminali

  che possono essere derivate da S
  - in un qualunque numero di passi

Esempio 1

- G_1=<{S,A,B}, {a,b,0}, P, S>
  - P={S→aA, A→aS, S→bB, B→bS, S→0}
- Alcune derivazioni
  - S ⇒ 0
  - S ⇒ aA ⇒ aaS ⇒ aa0
  - S ⇒ bB ⇒ bbS ⇒ bb0
  - S ⇒ aA ⇒ aaS ⇒ aabB ⇒ aabbS ⇒ aabb0
- Semplice generalizzazione: $L(G_1)=\{aa, bb\}^*.0$

Esempio 2

- G_2=<{S}, {a,b}, {S→aSb|ab}, S>
  - {S→aSb|ab} è un'abbreviazione di {S→aSb, S→ab}
- Alcune derivazioni
  - S ⇒ ab
  - S ⇒ aSb ⇒ aabb
  - S ⇒ aSb ⇒ aaSbb ⇒ aaabbb
- Semplice generalizzazione: $L(G_2)=\{a^n b^n | n>0\}$
  - $L(G_2)=\{a^n b^n | n\geq 0\}$ se sostituiamo S→ab con S→ε

Esempio 3

- G_3=<{S,A,B, C, D}, {a,b,c}, P, S>
  - P={S→aACD, A→aAC|ε, B→b, CD→BDc, CB→BC, D→ε}
- Alcune derivazioni
  - S ⇒ a**A**CD ⇒ a**CD** ⇒aBDc ⇒* abc
  - S ⇒ a**A**CD ⇒ aa**A**CCD ⇒ aaC**CD** ⇒ aa**CB**Dc ⇒ aa**B**CDc ⇒aab**CD**c ⇒ aab**B**Dcc ⇒ aabb**D**cc ⇒ aabbcc
  - S ⇒ a**A**CD ⇒ aa**A**CCD ⇒ aaCC**D** ⇒ aaCC

Alcune domande spontanee

- Qual è l'uso pratico delle grammatiche?
- Quali linguaggi si possono ottenere tramite le grammatiche?
- Che relazione c'è tra automi e grammatiche?
  - E tra i linguaggi generati dalle grammatiche e quelli accettati dagli automi?
  - E la gerarchia di Chomsky?

Alcune risposte

- Le grammatiche della gerarchia di Chomsky hanno nomi alternativi
  - Grammatiche di tipo 3: regolari
  - Grammatiche di tipo 2: non contestuali
  - Grammatiche di tipo 1: dipendenti dal contesto
  - Grammatiche di tipo 0: generali (o non ristrette)
- Correlazioni
  - Grammatiche regolari – linguaggi regolari – FSA
  - Grammatiche non contestuali – linguaggi non contestuali – NPDA
  - Grammatiche generali – linguaggi ricorsivamente enumerabili – TM

Automi, linguaggi e grammatiche

Gerarchia di Chomsky	Grammatiche	Linguaggi	Automa minimo
Tipo 0	Generali	Ricorsivamente enumerabili	Macchina di Turing
Tipo 1	Dipendenti dal contesto	Dipendenti dal contesto	*Automa lineare limitato (LBA)*
Tipo 2	Non contestuali	Non contestuali	NPDA
Tipo 3	Regolari	Regolari	FSA

Definizione

- Se per ogni $\alpha \rightarrow \beta \in P$ si ha $|\alpha| = 1$ e
  - $\beta \in V_N . V_T \cup V_T \cup \{\varepsilon\}$, la grammatica è **regolare sinistra**
- Se per ogni $\alpha \rightarrow \beta \in P$ si ha $|\alpha| = 1$ e
  - $\beta \in V_T . V_N \cup V_T \cup \{\varepsilon\}$, la grammatica è **regolare destra**
- Una grammatica è **regolare** (RG) sse è o regolare sinistra o regolare destra
- Un linguaggio è regolare sse è generato da una grammatica regolare
  - Ci dev'essere almeno una grammatica che lo genera

RG e FSA

Sia A un FSA. Si può costruire una RG G ad esso equivalente. Equivalente significa che G genera esattamente lo stesso linguaggio riconosciuto da A (e viceversa)

Le grammatiche regolari, gli automi a stati finiti e le espressioni regolari sono modelli diversi per descrivere la stessa classe di linguaggi

Costruzione di una RG da un FSA

- Se A=<Q, I, δ, q_0, F>, allora si può costruire G=< V_N, V_T, P, S > tale che
  - V_N = Q,
  - V_T = I,
  - S = q_0
  - Per ogni $\delta(q, i) = q'$
    - $q \rightarrow i\ q' \in P$
    - Se $q' \in F$ allora $q' \rightarrow \varepsilon \in P$
- $\delta^*(q, x) = q'$ se e solo se $q \Rightarrow^* xq'$

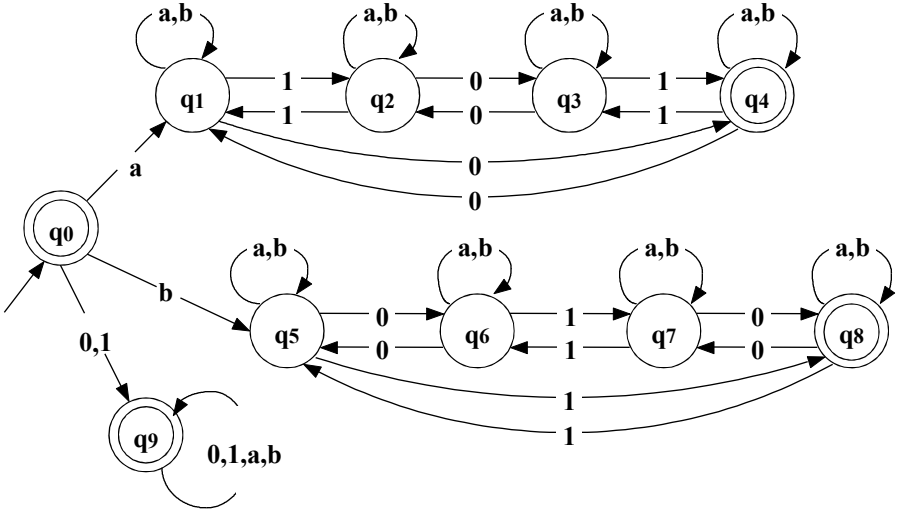
Costruzione di un FSA da una RG

Se G=< V_N, V_T, P, S > allora si può costruire A=<Q, I, δ, q_0, F> tale che

- Q = $V_N \cup \{q_F\}$
- I = V_T,
- q_0 = S,
- F = $\{q_F\}$
- Per ogni A→ bC, δ(A,b) = C
- Per ogni A→ b, δ(A,b) = q_F

Esempio (1)

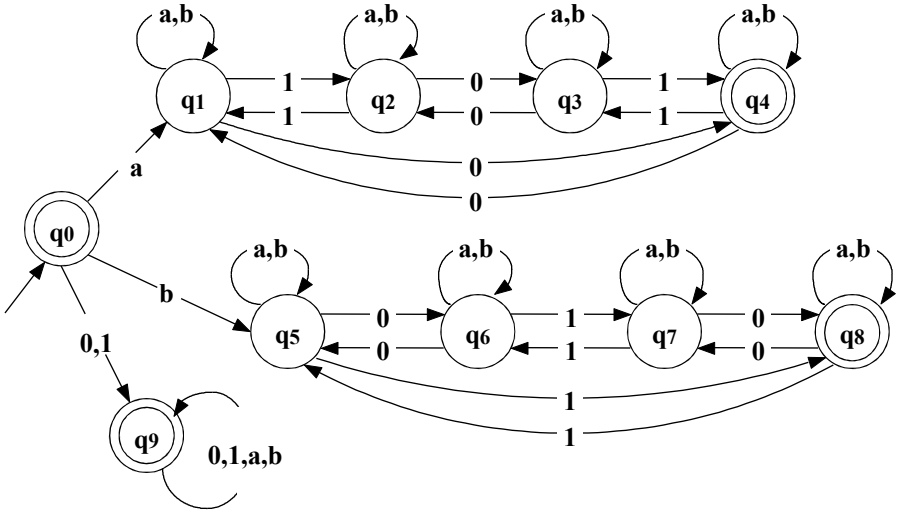
- Costruire un automa che riconosce il linguaggio L sull'alfabeto {a,b,0,1}, tale che una stringa x è in L se x ha le seguenti proprietà:
  - se x inizia con 'a' allora x ha un numero pari di '1' e un numero dispari di '0'
  - se x inizia con 'b' allora x ha un numero pari di '0' e un numero dispari di '1'



Esempio (2)

- Grammatica equivalente

  - $S \rightarrow aS_1 \mid bS_5 \mid 0S_9 \mid 1S_9 \mid \varepsilon$
  - $S_1 \rightarrow aS_1 \mid bS_1 \mid 1S_2 \mid 0S_4$
  - $S_2 \rightarrow aS_2 \mid bS_2 \mid 1S_1 \mid 0S_3$
  - $S_3 \rightarrow aS_3 \mid bS_3 \mid 0S_2 \mid 1S_4$
  - $S_4 \rightarrow aS_4 \mid bS_4 \mid 0S_1 \mid 1S_3 \mid \varepsilon$
  - $S_5 \rightarrow aS_5 \mid bS_5 \mid 0S_6 \mid 1S_8$
  - $S_6 \rightarrow aS_6 \mid bS_6 \mid 0S_5 \mid 1S_7$
  - $S_7 \rightarrow aS_7 \mid bS_7 \mid 0S_8 \mid 1S_6$
  - $S_8 \rightarrow aS_8 \mid bS_8 \mid 0S_7 \mid 1S_5 \mid \varepsilon$
  - $S_9 \rightarrow aS_9 \mid bS_9 \mid 0S_9 \mid 1S_9 \mid \varepsilon$



Definizione

- Una grammatica è detta **non contestuale** (CFG, cioè *context-free grammar*) se
  - per ogni $\alpha \rightarrow \beta \in P$, si ha $|\alpha| = 1$, cioè α è un elemento di V_N.
- Sono dette non contestuali perché la riscrittura di α non dipende dal contesto di α
  - contesto di α = parte della stringa che circonda α

Grammatiche non contestuali

- Le CFG sono la stessa cosa delle BNF (BNF = Backus-Naur Form) usate per definire la sintassi dei linguaggi di programmazione
  - sono adatte a definire le caratteristiche tipiche dei linguaggi di programmazione
- Le grammatiche regolari sono anche non contestuali
  - Ma non viceversa

Esempio di BNF

<if_statement> ::=

if <boolean_expression> **then**

<statement_sequence>

[**else** <statement_sequence>]

end if ;

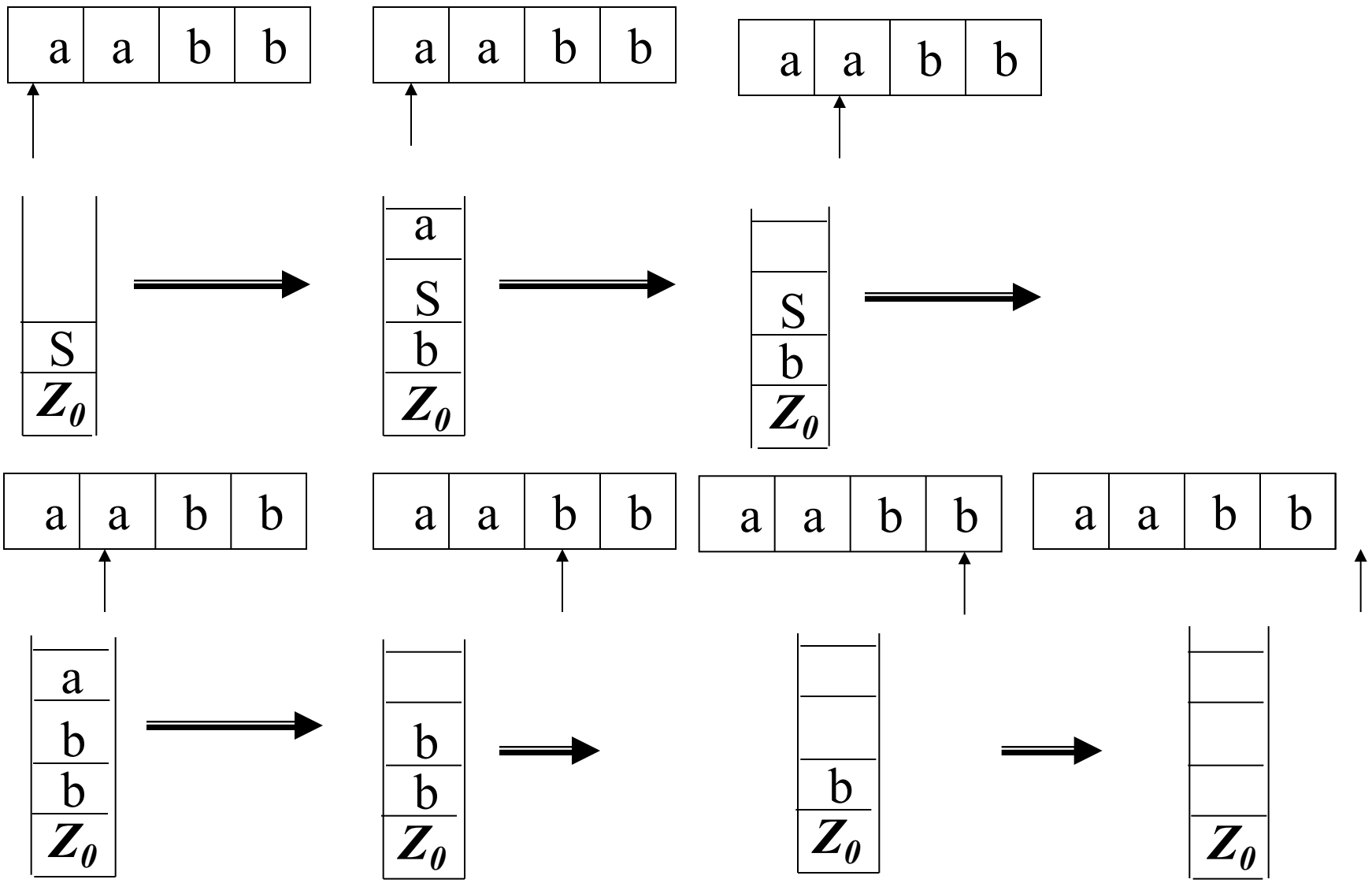
<statement_sequence> ::= <statement> [**;**
<statement_sequence>]

- Terminali in **grassetto rosso**
- Non terminali delimitati da parentesi angolari
- Elementi opzionali tra quadre

Le CFG sono equivalenti agli NPDA

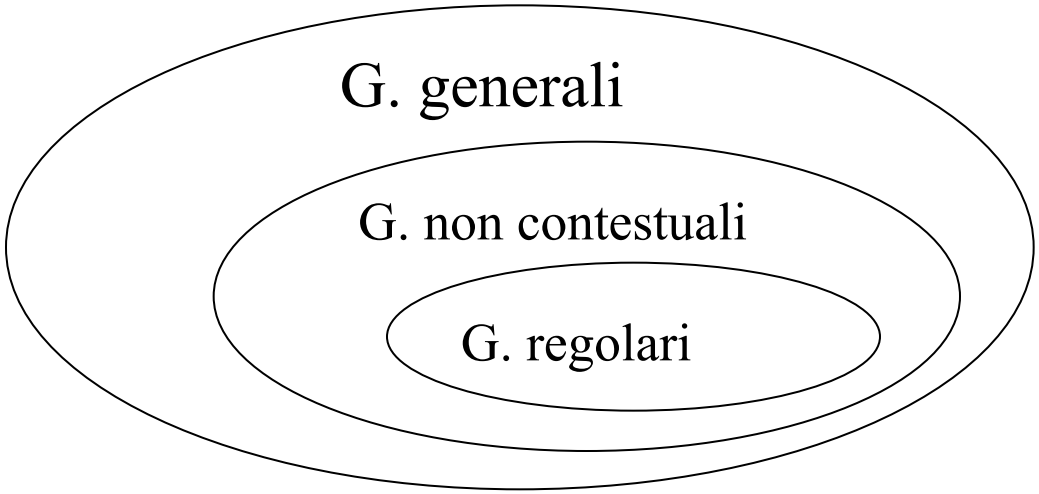
Giustificazione intuitiva (senza dimostrazione: la dimostrazione è al centro della costruzione dei compilatori)

$$S \Rightarrow aSb \Rightarrow aabb$$



Definizione

- Le grammatiche generali (o non ristrette) sono grammatiche senza limitazioni sulle produzioni
  - Corrispondono al tipo 0 della gerarchia di Chomsky
- Sia le grammatiche non contestuali, sia le regolari sono non ristrette



Grammatiche generali e TM

- Le grammatiche generali (GG) e le TM sono formalismi equivalenti
  - Data una GG si può costruire una TM che riconosca il linguaggio generato dalla GG
  - Data una TM si può definire una GG che genera il linguaggio accettato dalla TM
- Come?

Da una GG a una TM (1)

Data una grammatica generale $G=<V_N, V_T, P, S>$, costruiamo una NTM M tale che L(M)=L(G):

- M ha un nastro di memoria
- La stringa di ingresso x è sul nastro di ingresso
- Il nastro di memoria è inizializzato con S (o meglio: Z_0S)
- Il nastro di memoria in generale conterrà una qualche stringa α ($\in V^*$)
  - Viene scandito per cercare la parte sinistra di una produzione di P
  - Quando se ne trova una (non necessariamente la prima), M compie una scelta non deterministica e la parte scelta è sostituita dalla parte destra corrispondente (se ci sono diverse parti destre, ancora una volta, M compie una scelta non deterministica)

Da una GG a una TM (2)

- Così, ogni volta che $\alpha \Rightarrow \beta$, abbiamo

  $c_s = \langle q_s, Z_0\alpha \rangle \vdash^* \langle q_s, Z_0\beta \rangle$ per qualche stato q_s

- Se e quando il nastro contiene una stringa $y \in V_T^*$, è confrontata con x
  - Se coincidono, x è accettata
  - Altrimenti questa particolare sequenza di mosse non porta all'accettazione

Note

- Usare una NTM facilita la costruzione ma non è necessario
- Notare che, se $x \notin L(G)$, M può tentare infinite computazioni, nessuna delle quali porta ad accettazione
  - alcune di queste potrebbero non terminare mai, quindi (correttamente) senza poter concludere che $x \in L(G)$
  - *e anche* senza poter concludere che $x \notin L(G)$

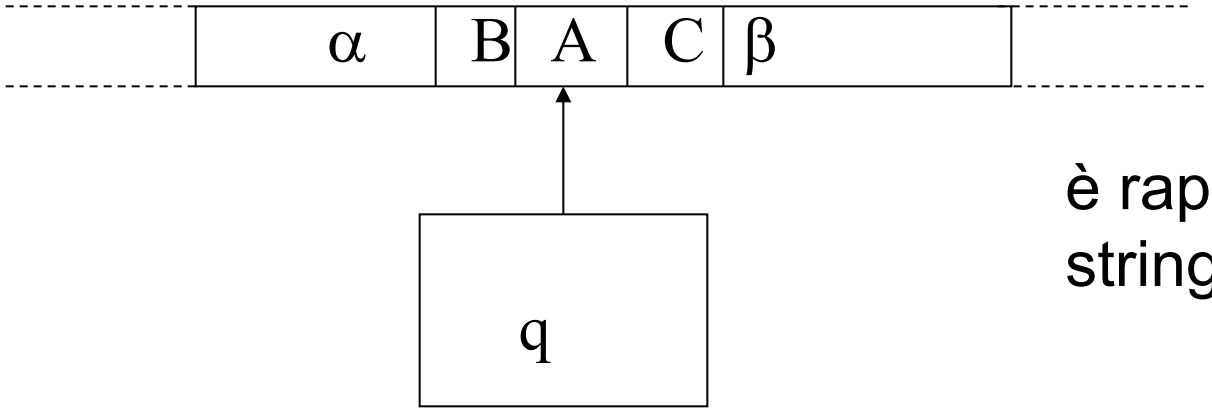
  Infatti la definizione di accettazione richiede che M raggiunga una configurazione di accettazione se e solo se $x \in L$
  - Non richiede che M termini la computazione in uno stato non finale se $x \notin L$
  - Ancora una volta abbiamo il problema del complemento e notiamo l'asimmetria tra la risoluzione di un problema in senso positivo o negativo

Da una TM a una GG (1)

Data una TM a nastro singolo M, costruiamo una grammatica generale G che genera L(M):

- Prima G genera tutte le stringhe del tipo x\$X, $x \in V_T^*$, dove X è una "copia di x" fatta di simboli non terminali (es., per x = aba, x\$X = aba\$ABA)
  - Questo si può fare con un numero finito di produzioni
- G simula le configurazioni di M usando la stringa a destra di \$
- G ha una derivazione $x\$X \Rightarrow^* x$ sse x è accettata da M
  - L'idea di base è di simulare ogni mossa di M con una derivazione immediata di G

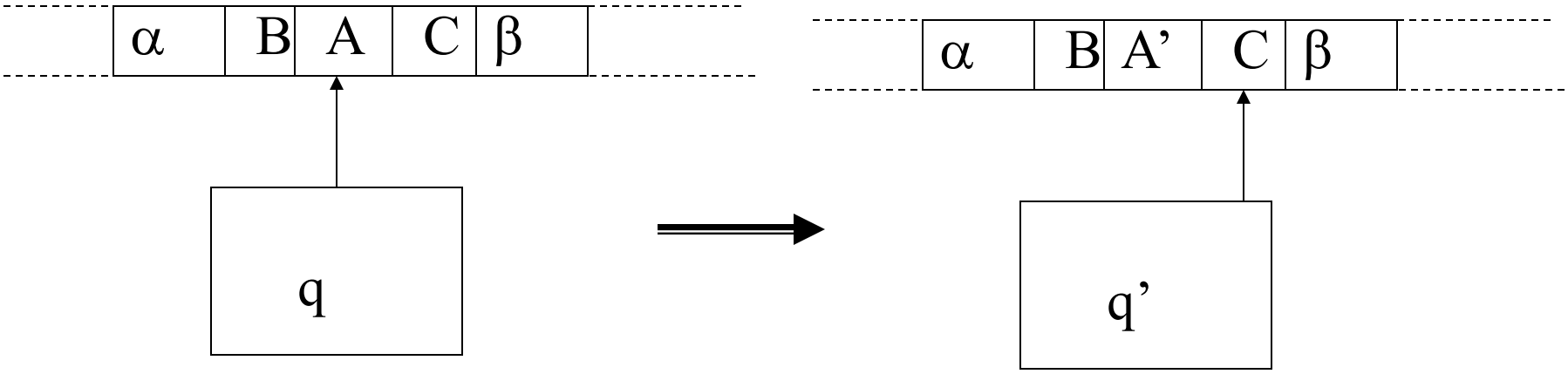
Da una TM a una GG (2)



è rappresentata dalla stringa αBqACβ dopo il $

- G ha quindi derivazioni della forma $x\$X \Rightarrow x\$q_oX$ (configurazione iniziale di M a destra del $)
- Inoltre
  - Se, in M, $\delta(q,A) = <q', A', R>$ allora G include la produzione $qA \rightarrow A'q'$
  - Se, in M, $\delta(q,A) = <q', A', S>$ allora G include la produzione $qA \rightarrow q' A'$
  - Se, in M, $\delta(q,A) = <q', A', L>$ allora G include la produzione $BqA \rightarrow q' BA'$ $\forall$ B nell'alfabeto di M (si ricordi che M è a nastro singolo, quindi ha un unico alfabeto per ingresso, memoria e uscita)

Da una TM a una GG (3)



Se e solo se: x\$αBqACβ ⇒ x\$αBA'q'Cβ, ecc.

- Alla fine aggiungiamo produzioni che consentono a G di derivare da x\$αBq$_F$ACβ la sola stringa x sse M raggiunge una configurazione di accettazione (αBq$_F$ACβ), cancellando qualunque cosa si trovi a destra del \$ (incluso il \$)