# Esempio 1

- Scrivere una formula di MFO che descrive parole in cui ogni volta che compare il simbolo *e*, prima di esso compare un simbolo *s*, e tra *s* ed *e* ci sono solo simboli *p*

$$\forall x(e(x) \Rightarrow \exists y(y<x \wedge s(y) \wedge \forall z(x<z \wedge z<y \Rightarrow p(z))))$$

# Esempio 2

- Scrivere una formula di MFO che descrive parole in cui ogni ogni simbolo *b*, è preceduto, in una delle 3 posizioni precedenti, da un simbolo *a*

$$\forall x(\, b(x) \Rightarrow \exists y( \quad (y = x\text{-}1 \wedge a(y)) \vee$$
$$(y = x\text{-}2 \wedge a(y)) \vee$$
$$(y = x\text{-}3 \wedge a(y)) \,))$$

- Che possiamo abbreviare come segue:

$$\forall x(\, b(x) \Rightarrow \exists y( \quad \exists i \in [1,3]\, (y = x\text{-}i \wedge a(y)) \,))$$

# Utili abbreviazioni

- In generale, se $\varphi_i$ è una formula in cui *i* corrisponde ad un numero naturale che prende valore in un sottoinsieme finito di $\mathbb{N}$ (per esempio [1,5], o, in generale, $[n_1,n_2]$ con $n_1$ ed $n_2$ costanti), noi scriveremo

  $\exists\, i \in [n_1,n_2]\, (\varphi_i)$ come abbreviazione di $\bigvee_{i \in [n_1,n_2]} (\varphi_i)$

  e

  $\forall\, i \in [n_1,n_2]\, (\varphi_i)$ come abbreviazione di $\bigwedge_{i \in [n_1,n_2]} (\varphi_i)$

- Possiamo scrivere anche cose del tipo
  $\exists\, i \in [1,10]\, (\varphi_i \wedge \forall\, j \in [5,20], j \neq i\, (\psi_{i,j}))$

# Esempio 3

- Scrivere una formula di MFO che descrive parole in cui tra 2 simboli *a* ci deve essere almeno un simbolo *b*.

$$\forall x,y( x < y \land a(x) \land a(y) \Rightarrow \exists z( x < z \land z < y \land b(z)))$$

# Esempio 4

- Scrivere una formula di MFO che descrive parole in cui il simbolo *p* è presente in tutte e sole le posizioni 2*k*-1 (con *k* un naturale), cioè la terza, sesta, nona, ecc.; inoltre, tra 2 simboli *p* consecutivi ci deve essere esattamente un solo simbolo *e*; la sequenza termina con un simbolo *p*.

$$
\begin{aligned}
&\exists x\,(x = 2 \wedge p(x)) \\
&\quad \wedge \\
&\quad \forall x(\, p(x) \Rightarrow \quad last(x) \vee \\
&\qquad\qquad \exists y( \quad (y = x+3 \wedge p(y) \wedge \\
&\qquad\qquad\qquad \forall z(x < z \wedge z < y \Rightarrow \neg p(z)) \;)) \\
&\quad \wedge \\
&\quad \forall x,y( \qquad x < y \wedge p(x) \wedge p(y) \wedge \;\; \forall z(x < z \wedge z < y \Rightarrow \neg p(z)) \\
&\qquad \Rightarrow \\
&\qquad \exists u\,( \quad x < u \wedge u < y \wedge e(y) \wedge \\
&\qquad\qquad \forall v\,(\, x < v \wedge v < y \wedge u \neq v \Rightarrow \neg e(v)) \;))
\end{aligned}
$$

# Esempio 5

- Scrivere una formula di MFO che descrive parole in cui ogni volta che c'è un simbolo *s*, fino a che non compare un simbolo *e*, il simbolo *p* si ripete con cadenza periodica, di periodo esattamente 3, tra *s* ed *e*. Il simbolo *s* non può ripetersi prima di un simbolo *e*.
  La sequenza non può terminare se, dopo un simbolo *s*, non c'è ancora stato il simbolo *e* (ma non è detto che la sequenza termini esattamente con una *e*).

$$
\begin{aligned}
\forall x(\ s(x) \Rightarrow\ \exists y\,(\ \ & x < y \land e(y)\\
& \land\\
& \forall z(x < z \land z < y \Rightarrow \neg s(z))\\
& \land\\
& \forall z(\quad z = x{+}3 \land \neg\exists t(x < t \land t < z \land e(t))\\
& \qquad\quad \Rightarrow\\
& \qquad\quad p(z) \land \neg\exists t(x < t \land t < z \land p(t))\ )\\
& \land\\
& \forall z,r(\quad x < z \land z < y \land p(z) \land r = z{+}3 \land \neg\exists t(z < t \land t < r \land e(t))\\
& \qquad\qquad\qquad \Rightarrow\\
& \qquad\qquad\qquad p(r) \land \neg\exists t(z < t \land t < r \land p(t)))\ ))
\end{aligned}
$$

# Esempio 6

- Scrivere una formula di MFO che descrive parole in cui i simboli *a*, *b*, *c*, al massimo compaiono una volta sola.

$$\forall x( a(x) \Rightarrow \forall y( x < y \Rightarrow \neg a(y)))$$
$$\wedge$$
$$\forall x( b(x) \Rightarrow \forall y( x < y \Rightarrow \neg b(y)))$$
$$\wedge$$
$$\forall x( c(x) \Rightarrow \forall y( x < y \Rightarrow \neg c(y)))$$

Formulazione alternativa (solo per *a*, le altre sono uguali):

$$\forall x,y( a(x) \wedge a(y) \Rightarrow x = y)$$

Altra formulazione alternativa (banale da derivare da quella sopra...):

$$\forall x,y( x \neq y \Rightarrow \neg(a(x) \wedge a(y)) )$$

# Esempio 7

- Scrivere una formula di MFO che descrive parole in cui, ogni 10 simboli, al massimo 2 possono essere *a*.

$$
\begin{aligned}
\forall x,y(\ & y = x + 9 \\
& \Rightarrow \\
& \neg \exists z_1,z_2,z_3\ ( \\
& \qquad x \leq z_1 \wedge z_1 < z_2 \wedge z_2 < z_3 \wedge z_3 \leq y \wedge \\
& \qquad a(z_1) \wedge a(z_2) \wedge a(z_3) \\
& ))
\end{aligned}
$$

# Esempio 8 (MSO)

- Formalizzare mediante una formula MSO il linguaggio L fatto di tutte e sole le parole tali che tra 2 occorrenze di *a* (senza simboli *a* tra di esse) c'è un numero dispari di simboli

$$
\begin{array}{l}
\forall x,y( \; x < y \wedge a(x) \wedge a(y) \wedge \forall z\,(x < z \wedge z < y \Rightarrow \neg a(z)) \\
\qquad \Rightarrow \\
\qquad \exists P\, ( \quad P(x) \wedge \\
\qquad\qquad \forall z,t\, ( \; x \leq z \wedge z < y \wedge t = z+1 \\
\qquad\qquad\qquad \Rightarrow \\
\qquad\qquad\qquad (P(z) \Leftrightarrow \neg P(t))) \wedge \\
\qquad\qquad P(y) \;))
\end{array}
$$

# Esempio 9 MSO (1)

- Formalizzare mediante una formula MSO il linguaggio L fatto di tutte e sole le parole tali che il numero di *b* è multiplo di 3, e ogni *b* compare tra una *a* e una *c* (tra una *a* e una *c* compare al massimo una *b*).

Primo pezzo: *b* compare solo tra *a* e *c* (e ce n'è una sola):

$$\forall x(\ b(x) \Rightarrow \ \exists u,v\ (u < x \land x < v \land a(u) \land c(v))\ )$$
$$\land$$
$$\forall x,y(\quad x < y \land a(x) \land c(y) \land \forall z\ (x < z \land z < y \Rightarrow \neg a(z))$$
$$\Rightarrow$$
$$\neg \exists u,v\ (x < u \land u < v \land v < y \land b(u) \land b(v))\ )$$

# Esempio 9 MSO (2)

Secondo pezzo: c'è un numero di *b* multiplo di 3.

$$
\begin{array}{l}
\exists N_0, N_1, N_2 \, ( \\
\qquad \forall x( \quad \neg(N_0(x) \wedge N_1(x)) \wedge \neg(N_0(x) \wedge N_2(x)) \wedge \neg(N_1(x) \wedge N_2(x)) \\
\qquad\qquad \wedge \\
\qquad\qquad (x = 0 \wedge b(x) \Rightarrow N_1(x)) \\
\qquad\qquad \wedge \\
\qquad\qquad (x = 0 \wedge \neg b(x) \Rightarrow N_0(x)) \\
\qquad\qquad \wedge \\
\qquad\qquad \forall y \, ( \quad y = x+1 \Rightarrow \quad (N_0(x) \wedge b(y) \Rightarrow N_1(y)) \wedge \\
\qquad\qquad\qquad\qquad (N_0(x) \wedge \neg b(y) \Rightarrow N_0(y)) \wedge \\
\qquad\qquad\qquad\qquad (N_1(x) \wedge b(y) \Rightarrow N_2(y)) \wedge \\
\qquad\qquad\qquad\qquad (N_1(x) \wedge \neg b(y) \Rightarrow N_1(y)) \wedge \\
\qquad\qquad\qquad\qquad (N_2(x) \wedge b(y) \Rightarrow N_0(y)) \wedge \\
\qquad\qquad\qquad\qquad (N_2(x) \wedge \neg b(y) \Rightarrow N_2(y)) \;\; ) \\
\qquad\qquad \wedge \\
\qquad\qquad (\mathrm{last}(x) \Rightarrow N_0(x)) \, ))
\end{array}
$$

# Esempio 10 MSO

- Formalizzare mediante una formula MSO il linguaggio L fatto di tutte e sole le parole tali che ci sono due *a* tra cui c'è un numero (non zero) di simboli che è multiplo di 4.

$$
\begin{array}{l}
\exists x,y(\ x < y \wedge a(x) \wedge a(y) \\
\qquad \wedge \\
\qquad \exists z\,(x < z \wedge z < y) \\
\qquad \wedge \\
\qquad \exists N_1, N_2, N_3, N_4\ ( \\
\qquad\quad \forall z\,(z = x + 1 \Rightarrow N_1(z)) \\
\qquad\quad \wedge \\
\qquad\quad \forall u,v\ (\ u = v + 1 \Rightarrow \qquad (N_1(v) \Leftrightarrow N_2(u)) \wedge \\
\qquad\qquad\qquad (N_2(v) \Leftrightarrow N_3(u)) \wedge \\
\qquad\qquad\qquad (N_3(v) \Leftrightarrow N_4(u)) \wedge \\
\qquad\qquad\qquad (N_4(v) \Leftrightarrow N_1(u))) \\
\qquad\quad \wedge \\
\qquad\quad \forall z\,(z = y - 1 \Rightarrow N_4(z))\ \ ))
\end{array}
$$

# Esempio 11 (MFO)

- Formalizzare mediante una formula MFO il linguaggio L fatto di tutte e sole le parole tali che i simboli *a* compaiono solo in sequenze di almeno 4 *a* consecutive.

$$\forall x( \quad a(x) \land (x = 0 \lor \exists y\, (y = x - 1 \land \neg a(y)) \\ \Rightarrow \\ \forall i \in [1,3]\, (\exists y\, (y = x + i \land a(y)) \;)$$

- Versione alternativa

$$\forall x( \quad a(x) \land (x = 0 \lor \exists y\, (y = x - 1 \land \neg a(y)) \\ \Rightarrow \\ \exists y\, (y = x + 3 \land \forall z\, ( x < z \land z \leq y \Rightarrow a(z)) \;)$$

# Esempio 12 (MSO)

- Formalizzare mediante una formula logica il linguaggio L = $\{aa,bb\}^+$.

$$
\begin{array}{l}
\forall x \, ( a(x) \lor b(x) ) \\
\quad \land \\
\quad \exists S( \; \exists x,y \, (x = 0 \land y = 1 \land S(x) \land S(y)) \\
\qquad \land \\
\qquad \forall x,y \, ( \quad y = x + 1 \land S(x) \land S(y) \\
\qquad\qquad \Rightarrow \\
\qquad\qquad last(y) \lor \exists u,v \, ( u = y + 1 \land v = y + 2 \land \neg S(u) \land \neg S(v)) \; ) \\
\qquad \land \\
\qquad \forall x,y \, ( \quad y = x + 1 \land \neg S(x) \land \neg S(y) \\
\qquad\qquad \Rightarrow \\
\qquad\qquad last(y) \lor \exists u,v \, ( u = y + 1 \land y = u + 2 \land S(u) \land S(v)) \; ) \\
\qquad \land \\
\qquad \forall x,y \, ( \quad y = x + 1 \land (S(x) \Leftrightarrow S(y)) \\
\qquad\qquad \Rightarrow \\
\qquad\qquad (a(x) \Leftrightarrow a(y)) \land (b(x) \Leftrightarrow b(y)) \; ))
\end{array}
$$