Algoritmi e Principi dell'Informatica

Appello del 29 settembre 2017

Nome:_____

Matricola:_____

Firma:_____

Esercizio 1 (10 punti)

Una macchina di Turing (MT) M_1 viene detta *più veloce* di una MT M_2 qualora, per ogni ingresso $x \in N$, M_1 non impieghi mai più mosse di M_2 per completare la propria esecuzione su x (convenzionalmente, qualora una MT non termini o termini in uno stato non finale per un qualche ingresso, nessun'altra MT impiega più mosse di essa per quell'ingresso).

Sia ora M_u una MT che calcola una funzione che è indefinita ovunque.

1. È decidibile il problema di stabilire se, data una generica MT, essa sia più veloce di M_u?

☐ Decidibile ☐ Indecidibile

Motivo:

2. Il problema precedente è deciso? ☐ Deciso ☐ Non deciso

Motivo:

3. È decidibile il problema di stabilire se, data una generica MT, M_u sia più veloce di essa?

☐ Decidibile ☐ Indecidibile

Motivo:

4. Il problema precedente è deciso? ☐ Deciso ☐ Non deciso

Motivo:

5. È decidibile il problema di stabilire se, date due generiche MT M_1 e M_2, M_1 sia più veloce di M_2? ☐ Decidibile ☐ Indecidibile

Motivo:

Esercizio 2 (6 punti)

Una macchina di Turing (MT) M_1 viene detta *più veloce* di una MT M_2 qualora, per ogni ingresso $x \in N$, M_1 non impieghi mai più mosse di M_2 per completare la propria esecuzione su x (convenzionalmente, qualora una MT non termini o termini in uno stato non finale per un qualche ingresso, nessun'altra MT impiega più mosse di essa per quell'ingresso).

Si fornisca una specifica in logica del prim'ordine del predicato binario *pv* che indica che il suo primo argomento è l'indice di una MT più veloce di quella che ha come indice il suo secondo argomento.

Nella specifica si può utilizzare e considerare già definita e da non specificare ulteriormente la funzione binaria *m*: dato un indice di MT y e un ingresso x, *m* restituisce il numero di mosse che impiega tale MT a terminare l'esecuzione su tale ingresso; *m* è indefinita qualora la macchina non termini o termini in uno stato non finale. Si può inoltre utilizzare il predicato di appartenenza all'insieme dei naturali ($\in N$) e il predicato $\leq$. Convenzionalmente, si assuma inoltre che $n \leq \perp$ valga per ogni n e che $\perp \leq n$ non valga mai per $n \neq \perp$.

Soluzione 1

1: decidibile perché chiaramente ogni macchina è più veloce di Mu.
2: anche deciso, perché la risposta è sempre nota (sì).
3: indecidibile, perché equivale a decidere se la generica MT sia ovunque indefinita, il che è indecidibile per il teorema di Rice.
4: non deciso poiché indecidibile.
5: indecidibile perché un suo caso particolare (problema 3) è indecidibile.

Esercizio 2

$\forall y_1 \forall y_2 \, (\, pv(y_1,y_2) \leftrightarrow \forall x \, (x \in N \rightarrow m(y_1,x) \leq m(y_2,x)) \,)$