Algoritmi e principi dell'informatica – PARTE DI INFORMATICA TEORICA

Esercizio 1 (7 punti)

Premessa: nello scrivere le soluzioni si può fare uso esclusivamente dei seguenti elementi, oltre agli usuali connettivi logici proposizionali, quantificatori, variabili e punteggiatura:

- la costante 1 (non sono consentite altre costanti);
- il predicato unario *pos*, che indica che il suo argomento è un intero positivo;
- il predicato binario *uguale*, che indica che i suoi argomenti sono due numeri uguali;
- la funzione binaria *somma*, che indica il risultato della somma dei suoi argomenti.

Non si possono utilizzare altri predicati, funzioni e costanti che non siano quelli suindicati, ma è possibile, sebbene non necessario, fare uso di definizioni di predicati e funzioni ausiliari.

Definire in logica del prim'ordine il predicato binario *maggiore* che indica che il primo argomento è un numero intero positivo strettamente maggiore del secondo (che è pure un numero intero positivo).

Definire quindi un predicato unario *pari* che indica il suo argomento è un numero intero positivo pari.

Esercizio 2 (9 punti)

Si consideri il linguaggio L delle stringhe sull'alfabeto {a,b,c,d}. Le stringhe di L hanno le seguenti caratteristiche:

1) Tutte le stringhe di L hanno la seguente forma $a^*b^*c^*d^*$;
2) Il numero di 'a' è pari al numero di 'b';
3) Il numero di 'c' è pari al numero di 'd';

a) Qual è il formalismo automatico a potenza riconoscitiva minima che riconosce L?

Motivo:

b) Cambierebbe qualcosa nella potenza minima richiesta se venisse rimosso il vincolo 1?

Formalismo minimo:

Motivo:

NB: Nei punti seguenti barrare ***tutte*** le risposte corrette!

c) Il problema di stabilire se una generica stringa di L rispetta il vincolo 1 è:

☐ Indecidibile ☐ Decidibile ☐ Deciso ☐ Semidecidibile

Motivo:

d) Il problema di stabilire se il linguaggio L è vuoto è:

☐ Indecidibile ☐ Decidibile ☐ Deciso ☐ Semidecidibile

Motivo:

e) Cambierebbe qualcosa nelle risposta al punto d) se invece di L si considerasse un generico linguaggio L', riconoscibile da una macchina di Turing? Il problema sarebbe:

☐ Indecidibile ☐ Decidibile ☐ Deciso ☐ Semidecidibile

Motivo:

Soluzione 1

$\forall x \forall y(maggiore(x, y) \leftrightarrow pos(x) \wedge pos(y) \wedge \exists z(pos(z) \wedge uguale(x,somma(y,z))))$

$\forall x(pari(x) \leftrightarrow \exists y(pos(y) \wedge uguale(x,somma(y,y))))$

Soluzione 2

a) Serve un DPDA, in quanto occorre la capacità di contare e l'ordine dei caratteri imposto dal primo vincolo consente di contare i simboli con un solo contatore (la pila)
b) Non basta più un DPDA, perché occorre contare due quantità e la pila è una memoria di tipo distruttivo. Serve una TM.
c) Tutte le stringhe di L rispettano il vincolo 1, per definizione. Quindi il problema è deciso (positivamente), e quindi anche decidibile e semidecidibile.
d) L non è vuoto, quindi il problema è deciso (negativamente), e quindi anche decidibile e semidecidibile.
e) È un noto problema indecidibile, e lo si può provare ad esempio con il teorema di Rice. Non è invece semidecidibile perché è semidecidibile il suo complemento e, essendo il problema indecidibile, non possono essere semidecidibili entrambe le metà. Il complemento del problema in questione è semidecidibile in quanto si possono enumerare diagonalmente stringhe e numeri di passi di esecuzione della TM in modo tale da scoprire, se esiste, una eventuale stringa che sia accettata dalla TM, o proseguire indefinitamente, se non esiste.