Algoritmi e Principi dell'Informatica

Appello d'esame

30 giugno 2014

Nome:_____

Matricola:_____

Firma:_____

Tempo a disposizione per la parte di informatica teorica: **1h15'**

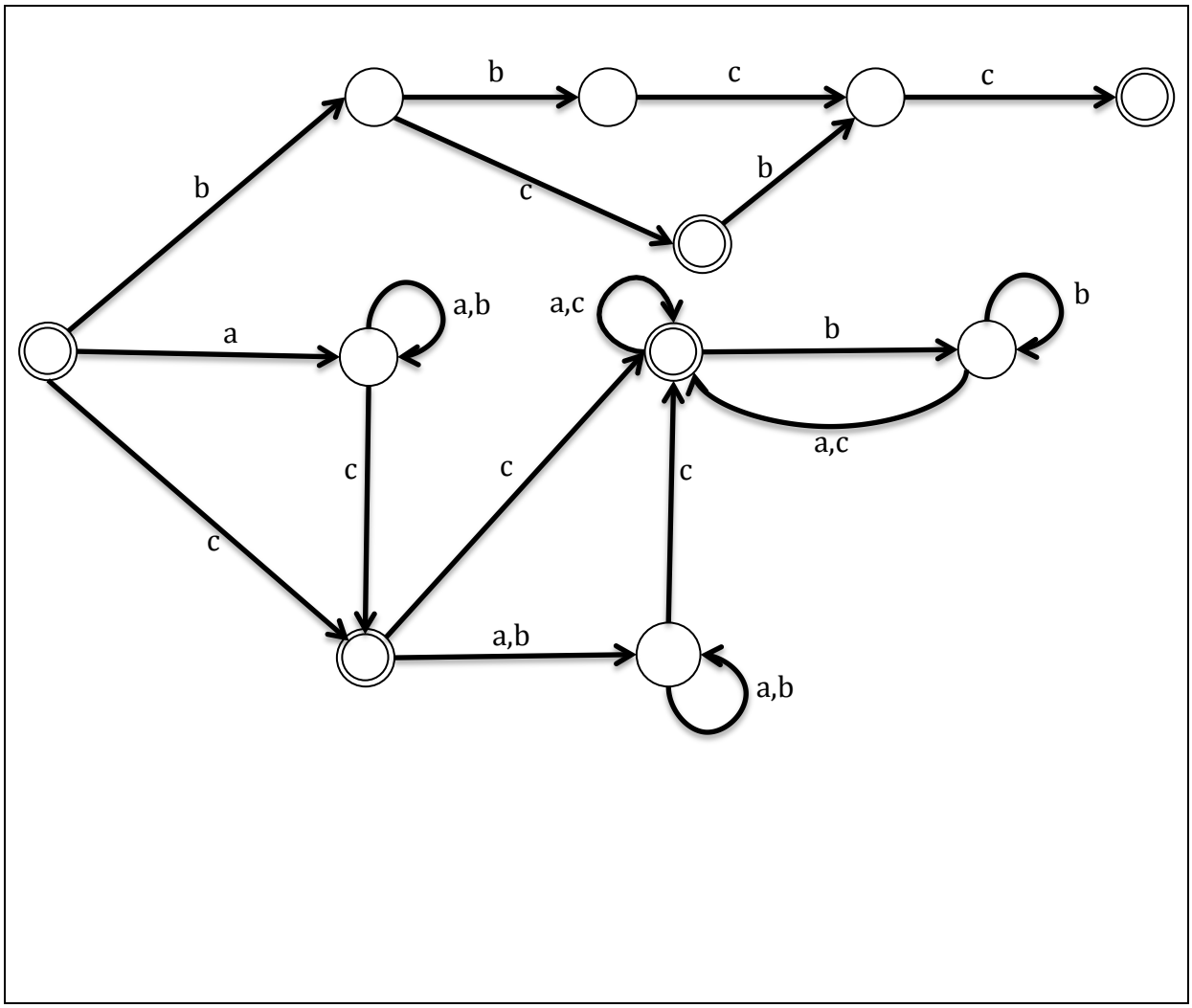
Esercizio 1

Si consideri il linguaggio L delle stringhe sull'alfabeto {a,b, c}, che terminano con 'a' o con 'c'. Le stringhe x di L hanno le seguenti caratteristiche:

. 1) Se x termina con 'a', allora x contiene almeno due 'c';

. 2) Se x inizia con 'b', allora x non contiene 'a', contiene lo stesso numero di 'b' e 'c' e |x|<5.

Rappresentare l'automa a potenza minima che riconosce L.



Cambierebbe qualcosa nella potenza minima richiesta se rimuovessimo la condizione $|x|<5$ al vincolo 2?. Motivare brevemente la risposta.

Sì, cambierebbe, in quanto occorrerebbe avere la capacità di contare numeri arbitrariamente grandi, notoriamente assente negli automi a stati finiti. Servirebbe quindi almeno un automa a pila.

Esercizio 2

Si indichi con un termine del tipo `v(x,y)` (dove `v` non è da specificare ulteriormente) il valore restituito dalla funzione calcolata dalla macchina di Turing con indice y su ingresso x (ossia il valore $f_y(x)$).

Si specifichi in logica del prim'ordine un predicato binario `e(i,j)` che è vero se e solo se le macchine di Turing con indici i e j sono equivalenti.

Si indichi inoltre la categoria sintattica (variabile, costante, funzione, predicato, ecc.) di ciascun simbolo usato nella soluzione.

$\forall i\ \forall j\ (e(i,j) \leftrightarrow \forall x\ v(x,i) = v(x,j))$

$\forall$ quantificatore
i variabile
j variabile
e predicato binario
(punteggiatura
, punteggiatura
) punteggiatura
$\leftrightarrow$ connettivo logico
x variabile
v funzione binaria
= predicato binario

Si specifichino in logica del prim'ordine le seguenti proprietà delle macchine di Turing.

- Per ogni macchina di Turing, esiste un'altra macchina di Turing che calcola la stessa funzione.

$\forall i\ \exists j\ (j \neq i \wedge e(i,j))$

- Per ogni funzione computabile, esistono infinite macchine di Turing che la calcolano.

$\forall i\ \exists j\ (j > i \wedge e(i,j))$

Esercizio 3

Dire, motivando la risposta, se i seguenti problemi sono decidibili:

1) Stabilire se, data una generica macchina di Turing, esista un'altra macchina ad essa equivalente (dove "equivalente" significa "che calcola la stessa funzione").

Il problema è decidibile in quanto è noto che ogni macchina di Turing ammette infinite macchine di Turing ad essa equivalenti (come peraltro indicato nel testo dell'Esercizio 2). Per trovare una macchina equivalente basta, ad esempio, aggiungere al diagramma degli stati altri stati non utilizzati dalla macchina.

2) Stabilire se tutte le macchine di Turing che terminano sempre siano equivalenti a una qualche altra macchina Turing che termina sempre entro 10 mosse.

In questo caso la domanda è chiusa, pertanto il problema è certamente decidibile.

Mediante semplici considerazioni legate alla modalità di esecuzione di una macchina di Turing (non richieste dall'esercizio), si può concludere che il problema è anche deciso (negativamente). Infatti, per la sola lettura di un ingresso x occorrono |x| mosse. Pertanto una macchina che non esegue mai più di 10 mosse non può calcolare una funzione che dipenda da un ingresso (come ad esempio f(x)=x), dal momento che non può neanche leggerlo. Allora non è vero che tutte le macchine di Turing hanno la proprietà descritta.