Algoritmi e Principi dell'Informatica
Appello d'esame
1 Febbraio 2013

Nome:_____

Matricola:_____

Firma:_____

Tempo a disposizione per la parte di informatica teorica: **1h30'**

Esercizio 1 (punti 7)

Una *rete di Petri con gettoni colorati* (RPGC) è un'estensione del formalismo delle reti di Petri. Il principio di funzionamento è lo stesso, ma, in aggiunta, ciascun gettone è dotato di un colore. Inoltre, in ogni transizione, ciascun arco (entrante e uscente) è associato ad un colore (non necessariamente lo stesso all'interno di una stessa transizione); la transizione può scattare se per ogni arco entrante c'è un gettone del colore corrispondente nel posto in ingresso corrispondente; l'effetto dello scatto è l'aggiunta di un gettone del colore di ciascun arco uscente nel corrispondente posto in uscita.

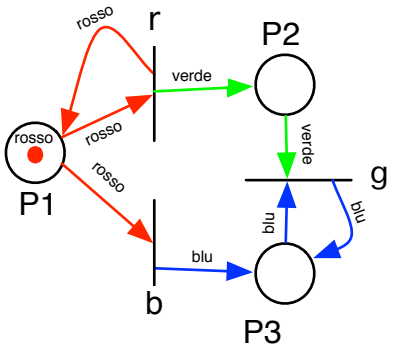
Quesito 1.1

Si dia una definizione formale di RPGC come riconoscitore di linguaggi, evidenziando le differenze rispetto a una rete di Petri classica.

Quesito 1.2

Si consideri ora il caso delle 3-RPGC, ovvero delle RPGC con soli tre colori (ad esempio: rosso, verde e blu) e un alfabeto di input di tre soli simboli (ad esempio: r, g e b).

Qual è il linguaggio riconosciuto dalla 3-RPGC mostrata qui sotto, in cui la marcatura finale è "un gettone blu in P3 e 0 gettoni negli altri posti"?



Quesito 1.3

Si consideri il linguaggio L = {wbw' | w∈{r,g}* e w' è una permutazione di w}. Esiste una 3-RPGC in grado di riconoscere il linguaggio L? Se sì, mostrarla; se no, motivare.

Esercizio 2 (punti 5)

Specificare in logica del prim'ordine il seguente linguaggio:

$L = \{ a^n b^* c^{2n} \mid n \geq 0 \}$

Si possono considerare già specificati il predicato di uguaglianza (=), il predicato di appartenenza insiemistica (∈), la funzione di concatenazione (·), la costante che rappresenta la stringa vuota (**ε**) e le costanti a, b, c.

Esercizio 3 (punti 5)

E' decidibile il problema di stabilire se una generica macchina di Turing M si arresta entro 10 mosse con qualunque stringa di ingresso? Fornire un'opportuna giustificazione della propria risposta.

Esercizio 1

Quesito 1.1

La formalizzazione di RPGC come riconoscitore di linguaggi è analoga a quella delle reti di Petri standard (si evidenziano qui le parti che differiscono significativamente).

Una RPGC è una tupla <P,T,IF,OF,Σ,C,L,M_0,F>, con

- P: insieme finito dei posti
- T: insieme finito delle transizioni
- IF: $P \times T \times C \rightarrow \mathbf{N}$ funzione di input delle transizioni
    a. Se tra il posto p e la transizione t non c'è nessun arco di colore c: IF(p,t,c)=0
- OF: $T \times C \times P \rightarrow \mathbf{N}$ funzione di output delle transizioni
    b. Se tra la transizione t e il posto p non c'è nessun arco di colore c: OF(t,p,c)=0
- Σ è l'alfabeto di input
- C è l'alfabeto dei colori
- L: $T \rightarrow \Sigma \cup \{\varepsilon\}$ è una funzione che etichetta ogni transizione della rete con un simbolo dell'alfabeto, oppure con ε in caso di etichetta vuota
- M_0: marcatura iniziale
- F: insieme finito di marcature finali.

Una marcatura di una RPGC è una funzione $M : P \times C \rightarrow \mathbf{N}$.

Una transizione t è abilitata da una marcatura M se e solo se, per ogni posto p e colore c, $M(p,c) \geq IF(p,t,c)$.

La relazione di transizione tra marcature (M |-t M') sussiste se e solo se t è abilitata da M e, per ogni p e c, $M'(p,c) = M(p,c)-IF(p,t,c)+OF(t,c,p)$.

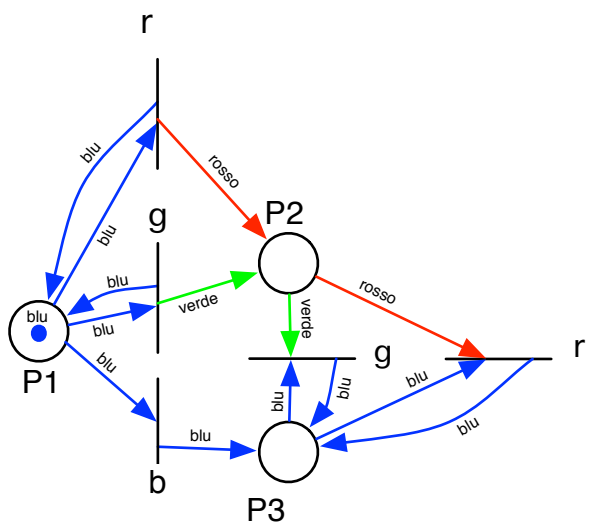
Le nozioni di sequenza di sparo e di linguaggio riconosciuto dalla rete sono analoghe a quelle delle reti di Petri standard.

Quesito 1.2

Il linguaggio riconosciuto dalla 3-RPGC mostrata è $\{r^n b g^n \mid n \geq 0\}$.

Quesito 1.3

Il linguaggio L è riconosciuto dalla 3-RPGC seguente, in cui la marcatura finale è "un gettone blu in P3 e 0 gettoni negli altri posti".



Esercizio 2

$$\forall x\ ((x \in L_1 \leftrightarrow x = \boldsymbol{\varepsilon} \vee \exists y \in L_1 \wedge x = b \cdot y) \wedge$$
$$(x \in L \leftrightarrow x \in L_1 \vee \exists y \in L \wedge x = a \cdot y \cdot c \cdot c))$$

Esercizio 3

Il problema è decidibile, in quanto, in 10 mosse, la macchina può leggere al più 10 caratteri dal nastro di ingresso. Pertanto basta testarne il comportamento per tutte le stringhe di ingresso di lunghezza inferiore o uguale a 10 (che sono in numero finito). Per ciascuna di queste si osserva il comportamento nelle prime 10 mosse e si vede se la macchina si arresta.