Algoritmi e Principi dell'Informatica

Appello d'esame

8 settembre 2015

Nome:_____

Matricola:_____

Firma:_____

Tempo a disposizione per la parte di informatica teorica:

Esercizio 1 (8 punti)

Sia L_1 il linguaggio $\{a^n b^n \mid n \geq 0\}$ e sia L_2 il complemento di L_1.
Progettare un automa a potenza minima (tra FSA, DPDA, NDPDA, TM) che riconosca L_2.

Sia L_3 il linguaggio $\{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$ e sia L_4 il complemento di L_3.

Quale (tra FSA, DPDA, NDPDA, TM) è il tipo di automa a potenza minima che riconosca L_4? Giustificare la risposta.

Quale (tra FSA, DPDA, NDPDA, TM) è il tipo di automa a potenza minima che riconosca il linguaggio $L_5 = L_2 \cup L_4$? Giustificare la risposta.

Esercizio 2 (8 punti)

Con riferimento alla consueta notazione secondo cui f_i indica la funzione associata alla macchina di Turing (TM) con indice *i*, si considerino i seguenti insiemi:

S_1 = { *i* | f_i è una funzione totale }

S_2 = { *i* | f_i è una funzione computabile }

S_3 = { *i* | *i* è l'indice di una TM che si arresta per qualunque ingresso }

S_4 = { *i* | f_i può essere calcolata da un FSA }

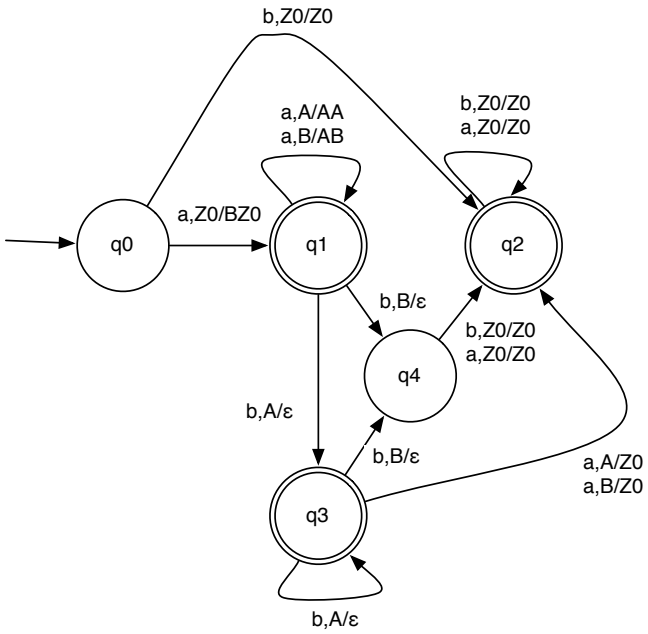
S_5 = { *i* | *i* è l'indice di una TM in cui lo stato iniziale è anche finale }

Per ciascuno degli insiemi S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, dire se è ricorsivo.

SOLUZIONI

Soluzione Esercizio 1

Parte a.



Parte b.

In questo caso è sufficiente un automa a pila non deterministico. Infatti, il linguaggio è l'unione dei linguaggi L'={$a^n b^m c^p$|n≠m}, L''={$a^n b^m c^p$|m≠p} e L'''={a,b,c}* \ a*b*c*. I primi due sono implementabili semplicemente mediante automi a pila, il terzo è regolare.

Si noti che L_4 non può essere riconosciuto da un automa a pila deterministico, in quanto la classe di linguaggi riconoscibili da DPDA è chiusa rispetto alla complementazione, e il complemento di L_4 non è riconoscibile da automi a pila.

Parte c.

Poichè L_2 sia L_4 sono riconoscibili mediante automi a pila non deterministici e la classe dei linguaggi non contestuali è chiusa rispetto all'unione, sicuramente anche il linguaggio L_5 è riconoscibile mediante automi a pila non deterministici. Considerato però che L_5 corrisponde all'insieme di tutte le stringhe su {a, b, c}, a meno della stringa vuota, per riconoscerlo è sufficiente un automa a stati finiti.

Soluzione Esercizio 2

Notiamo che gli insiemi S_1 e S_3 sono lo stesso insieme. Il problema di determinare se una funzione sia totale è notoriamente indecidibile (come si può determinare anche applicando direttamente il teorema di Rice), pertanto S_1 e S_3 non sono ricorsivi.

L'insieme S_2 è banalmente l'insieme di tutti i numeri naturali, poiché ogni funzione calcolata da una TM è ovviamente computabile. Pertanto l'insieme S_2 è ricorsivo (come si nota applicando ad esempio il teorema di Rice).

L'insieme S_4 non è ricorsivo (per il teorema di Rice) poiché l'insieme di funzioni calcolabili mediante un FSA non è né l'insieme vuoto, né l'insieme di tutte le funzioni computabili.

Nel caso dell'insieme S_5, la proprietà considerata riguarda la struttura delle TM e non le funzioni da esse calcolate, pertanto il teorema di Rice non è direttamente applicabile. Una semplice procedura di decisione per l'insieme S_5 è la seguente:

- mediante l'enumerazione di Gödel, generare la struttura della *i*-esima TM (cioè una stringa che rappresenta secondo opportune convenzioni il diagramma di stato della TM);
- data la stringa del punto precedente, mediante banale ispezione è immediato determinare se lo stato iniziale sia anche finale (le convenzioni di rappresentazione della stringa includono ovviamente anche l'indicazione di quali stati siano finali).

Poiché ne abbiamo appena esibito una procedura di decisione, l'insieme S_5 è ricorsivo.