API

Ripasso di logica

Davide Martinenghi

Politecnico di Milano

Logica proposizionale - sintassi

- $\mathcal{L}$ è un linguaggio della logica proposizionale
- L'alfabeto di $\mathcal{L}$ è composto da
  - Un insieme numerabile (finito o infinito) di proposizioni (simboli di relazione nullaria): $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$, ...
  - I seguenti connettivi: $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$
  - I simboli di punteggiatura: **(**, **)**
- I simboli dell'alfabeto sono privi di significato (assegnarne uno è compito della "semantica")

Logica proposizionale - sintassi

- L'insieme di formule di $\mathcal{L}$ è il più piccolo insieme tale che:
  - Ogni proposizione è una formula
  - Se F e G sono formule, allora $(\neg F)$, $(F \wedge G)$, $(F \vee G)$, $(F \rightarrow G)$ e $(F \leftrightarrow G)$ sono formule
- Le parentesi sono omesse ovunque possibile usando la precedenza: $\neg > \wedge > \vee > \rightarrow > \leftrightarrow$
- Se A è una proposizione, allora A e $\neg A$ sono detti letterali
- A è detto letterale positivo; $\neg A$ letterale negativo
- Se L è un letterale, $\bar{L}$ è il letterale complementare definito come $\neg A$ se $L = A$, o A se $L = \neg A$

Logica proposizionale - sintassi

- Informalmente, una sotto-formula è una formula inclusa in un'altra formula
- L'insieme $\mathcal{T}(F)$ delle sotto-formule di $\mathcal{F}$ è definito come il più piccolo insieme di formule tale che
  - $F \in \mathcal{T}(F)$
  - se $\neg G \in \mathcal{T}(F)$ allora $G \in \mathcal{T}(F)$
  - se $G \wedge H$, $G \vee H$, $G \rightarrow H$ o $G \leftrightarrow H$ appartengono a $\mathcal{T}(F)$, allora $H, G \in \mathcal{T}(F)$

Logica proposizionale - semantica

- La semantica è introdotta per assegnare un significato alle formule
- Nella logica proposizionale, ogni formula può corrispondere a un solo valore di verità: o **vero** o **falso**
- È una logica a due valori; altre logiche introducono valori di verità aggiuntivi
- Un'interpretazione ***I*** è una funzione totale dall'insieme di proposizioni ai valori di verità
- Ogni interpretazione può essere convenientemente rappresentata come l'insieme delle proposizioni vere

Logica proposizionale - semantica

- Un'interpretazione può essere estesa all'insieme delle formule
- $I \models F$ significa che I rende vera F

$$
\begin{array}{rl}
I \models A & \text{sse } I(A) = \textbf{vero} \ (A \text{ è una proposizione}) \\
I \models \neg F & \text{sse } I \not\models F \\
I \models F \wedge G & \text{sse } I \models F \text{ e } I \models G \\
I \models F \vee G & \text{sse } I \models F \text{ o } I \models G \\
I \models F \rightarrow G & \text{sse } I \not\models F \text{ o } I \models G \\
I \models F \leftrightarrow G & \text{sse } I \models F \rightarrow G \text{ e } I \models G \rightarrow F
\end{array}
$$

- Esempio: $I_1 = \{A, C\}, I_2 = \{C, D\}, F = (A \vee B) \wedge (C \vee D)$ allora $I_1 \models F$ ma $I_2 \not\models F$

Logica proposizionale - semantica

- L'interpretazione dei connettivi può anche essere esplicitata mediante una tabella di verità

F	G	$\neg F$	$F \wedge G$	$F \vee G$	$F \rightarrow G$	$F \leftrightarrow G$
vero	**vero**	**falso**	**vero**	**vero**	**vero**	**vero**
vero	**falso**	**falso**	**falso**	**vero**	**falso**	**falso**
falso	**vero**	**vero**	**falso**	**vero**	**vero**	**falso**
falso	**falso**	**vero**	**falso**	**falso**	**vero**	**vero**

Logica proposizionale - semantica

- Se $I \models F$, allora diciamo che I è un modello di F. Questa nozione può essere estesa agli insiemi di formule
- F è valida (o una tautologia) sse per ogni interpretazione I vale che $I \models F$
  - In questo caso si può anche scrivere $\models F$
- F è soddisfacibile sse esiste un'interpretazione I tale che $I \models F$
- F è falsificabile sse esiste un'interpretazione I tale che $I \not\models F$
- F è insoddisfacibile sse per ogni interpretazione I vale che $I \not\models F$
- F è contingente sse è sia soddisfacibile sia falsificabile
- Esempi: $A \vee \neg A$ è valida; $A \vee B$ è sia soddisfacibile sia falsificabile; $A \wedge \neg A$ è insoddisfacibile
- Ogni formula del tipo $F \wedge \neg F$ è una contraddizione, spesso indicata con $\perp$; la formula $F \vee \neg F$ è detta principio del terzo escluso, spesso scritta come $\top$

Logica proposizionale - semantica

- Un insieme di formule $\mathcal{F}$ comporta logicamente una formula G (o G è una conseguenza logica di $\mathcal{F}$) se ogni modello di $\mathcal{F}$ è anche un modello di G. Si scrive $\mathcal{F} \models G$
- Esempio: $\{A, A \rightarrow B\} \models B$, $\{A, A \rightarrow B\} \models B \vee C$, $\{A, A \rightarrow B\} \not\models C$
- Per determinare sistematicamente se una formula segua da un insieme di formule si possono usare le tabelle di verità.
  - Si devono considerare tutte le possibili combinazioni di valori di verità per ogni proposizione

Logica proposizionale - forme normali

- Due formule F e G sono (semanticamente) equivalenti sse vale sia $F \models G$ sia $G \models F$
- Si scrive $F \equiv G$

Logica proposizionale - forme normali

- Equivalenze notevoli:

$(F \wedge F)$	$\equiv$	F	idempotenza di $\wedge$
$(F \vee F)$	$\equiv$	F	idempotenza di $\vee$
$(F \wedge G)$	$\equiv$	$(G \wedge F)$	commutatività di $\wedge$
$(F \vee G)$	$\equiv$	$(G \vee F)$	commutatività di $\vee$
$(F \wedge (G \wedge H))$	$\equiv$	$((F \wedge G) \wedge H)$	associatività di $\wedge$
$(F \vee (G \vee H))$	$\equiv$	$((F \vee G) \vee H)$	associatività di $\vee$
$((F \wedge G) \vee F)$	$\equiv$	F	assorbimento
$((F \vee G) \wedge F)$	$\equiv$	F	assorbimento
$(F \wedge (G \vee H))$	$\equiv$	$((F \wedge G) \vee (F \wedge H))$	distributività
$(F \vee (G \wedge H))$	$\equiv$	$((F \vee G) \wedge (F \vee H))$	distributività
$(\neg(\neg F))$	$\equiv$	F	doppia negazione
$(\neg(F \wedge G))$	$\equiv$	$(\neg F \vee \neg G)$	legge di de Morgan
$(\neg(F \vee G))$	$\equiv$	$(\neg F \wedge \neg G)$	legge di de Morgan
$(F \leftrightarrow G)$	$\equiv$	$(F \rightarrow G) \wedge (G \rightarrow F)$	equivalenza
$(F \rightarrow G)$	$\equiv$	$(\neg F \vee G)$	implicazione materiale
$(F \rightarrow G)$	$\equiv$	$(\neg G \rightarrow \neg F)$	contronominale

Logica proposizionale - forme normali

- Equivalenze notevoli (senza parentesi ridondanti):

$F \wedge F$	$\equiv$	F	idempotenza di $\wedge$
$F \vee F$	$\equiv$	F	idempotenza di $\vee$
$F \wedge G$	$\equiv$	$G \wedge F$	commutatività di $\wedge$
$F \vee G$	$\equiv$	$G \vee F$	commutatività di $\vee$
$F \wedge (G \wedge H)$	$\equiv$	$(F \wedge G) \wedge H$	associatività di $\wedge$
$F \vee (G \vee H)$	$\equiv$	$(F \vee G) \vee H$	associatività di $\vee$
$F \wedge G \vee F$	$\equiv$	F	assorbimento
$(F \vee G) \wedge F$	$\equiv$	F	assorbimento
$F \wedge (G \vee H)$	$\equiv$	$F \wedge G \vee F \wedge H$	distributività
$F \vee G \wedge H$	$\equiv$	$(F \vee G) \wedge (F \vee H)$	distributività
$\neg\neg F$	$\equiv$	F	doppia negazione
$\neg(F \wedge G)$	$\equiv$	$\neg F \vee \neg G$	legge di de Morgan
$\neg(F \vee G)$	$\equiv$	$\neg F \wedge \neg G$	legge di de Morgan
$F \leftrightarrow G$	$\equiv$	$(F \rightarrow G) \wedge (G \rightarrow F)$	equivalenza
$F \rightarrow G$	$\equiv$	$\neg F \vee G$	implicazione materiale
$F \rightarrow G$	$\equiv$	$\neg G \rightarrow \neg F$	contronominale

Logica proposizionale - forme normali

- Quando sostituiamo una sotto-formula G di F con una formula H, la formula risultante viene indicata con $F[G \backslash H]$

Teorema della sostituzione

Se G è una sotto-formula di F e $G \equiv H$ allora $F \equiv F[G \backslash H]$

- In base alle equivalenze date, non tutti i connettivi sono strettamente necessari
- Un insieme di connettivi è funzionalmente completo sse qualunque formula proposizionale può essere trasformata in una formula semanticamente equivalente che contiene solo connettivi dell'insieme
- Esempio: $\{\neg, \wedge\}$ è funzionalmente completo
- Si possono definire altri connettivi booleani che, singolarmente, sono funzionalmente completi: nand e nor

Logica proposizionale - forme normali

- Il teorema di sostituzione e le equivalenze notevoli possono essere utilizzate per introdurre le cosiddette forme normali
- Una formula è in forma normale negativa sse è composta solo da letterali, congiunzioni e disgiunzioni
- Una formula è in forma normale congiuntiva (CNF) sse ha la forma $C_1 \wedge C_2 \wedge \ldots \wedge C_n$ dove ogni C_i è una disgiunzione di letterali
- Una formula è in forma normale disgiuntiva (DNF) sse ha la forma$D_1 \vee D_2 \vee \ldots \vee D_n$ dove ogni D_i è una congiunzione di letterali
- $C_1 \wedge C_2 \wedge \ldots \wedge C_n \equiv C_1 \wedge C_2 \wedge \ldots \wedge C_n \wedge \top$, quindi possiamo dire che $\top$ è in CNF prendendo $n = 0$
- $D_1 \vee D_2 \vee \ldots \vee D_n \equiv D_1 \vee D_2 \vee \ldots \vee D_n \vee \bot$, quindi possiamo dire che $\bot$ è in DNF prendendo $n = 0$
- I C_i sono detti clausole; i D_i sono detti clausole duali; di solito si usa una notazione insiemistica

Logica proposizionale - sistemi formali (calculi)

- Ci chiediamo ora se le conseguenze logiche possono essere calcolate meccanicamente
- Un sistema formale (assiomatico-deduttivo), calculus in inglese, consiste di un insieme di assiomi e un insieme di regole d'inferenza che producono conseguenze logiche all'interno di una logica
- Questi elementi definiscono una relazione di derivabilità (anche detta dimostrabilità) tra un insieme di formule $\mathcal{F}$ e una formula $\boldsymbol{G}$.
- Scriviamo $\mathcal{F} \vdash \boldsymbol{G}$ se $\boldsymbol{G}$ può essere ottenuto da $\mathcal{F}$ applicando solo regole di inferenza e assiomi.
- Idealmente, la relazione di derivabilità dovrebbe essere corretta (cioè, se $\mathcal{F} \vdash \boldsymbol{G}$ allora $\mathcal{F} \models \boldsymbol{G}$) e completa (cioè, se $\mathcal{F} \models \boldsymbol{G}$ allora $\mathcal{F} \vdash \boldsymbol{G}$)
- Se una formula $\boldsymbol{F}$ può essere derivata in una teoria $\mathcal{F}$ usando gli assiomi e le regole d'inferenza di un sistema, allora diciamo che $\boldsymbol{F}$ è un teorema

Logica del prim'ordine (FOL) - sintassi

- La logica proposizionale (PL) ha molte applicazioni, ma il suo potere espressivo è ristretto
- Frasi quali "tutti gli esseri umani sono mortali" e "ogni figlio ha dei genitori" possono essere espresse come proposizioni in un modo che non cattura le relazioni sottintese tra esseri umani, mortali, figli e genitori
- Frege ha sviluppato la cosiddetta logica del prim'ordine (FOL, nota anche come logica dei predicati) nel 1879, estendendo la logica proposizionale con funzioni, variabili e quantificatori
- Dal punto di vista epistemologico (stati della conoscenza), sia PL sia FOL considerano verità e falsità
- Dal punto di vista ontologico (ciò che esiste), PL considera fatti, mentre FOL considera anche
  - oggetti: persone, case, numeri, corsi, ...
  - proprietà e relazioni: essere rosso, essere felice, essere primo, ..., essere più grande di, essere parte di, ...
  - funzioni: padre di, età di, successore di, ...

FOL - sintassi

- L'alfabeto di un linguaggio della FOL $\mathcal{L}$ è composto da
  - Un insieme infinito numerabile di variabili: $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z}, \ldots$
  - Un insieme di simboli di funzione: $\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g}, \ldots$
  - Un insieme di simboli di predicati (o relazioni): $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{r}, \ldots$
  - I seguenti connettivi: $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$
  - I seguenti quantificatori: $\exists, \forall$
  - I simboli di punteggiatura: **(**, **)** e le virgole
- Ogni simbolo di funzione e relazione ha una arietà fissata che indica il numero di argomenti associati ad esso
- Le funzioni nullarie sono dette costanti; i predicati nullari sono detti proposizioni
- I simboli dell'alfabeto sono privi di significato (assegnarne uno è compito della "semantica")

FOL - sintassi

- I termini denotano tutti gli oggetti di cui $\mathcal{L}$ può parlare. Sono definiti induttivamente come segue:
  - Ogni variabile è un termine
  - Se f è un simbolo di funzione n-aria e $t_1, \ldots, t_n$ sono termini, allora $f(t_1, \ldots, t_n)$ è un termine
- I termini generici sono tipicamente indicati con $s, t, \ldots$
- Una funzione nullaria $c()$ è semplicemente scritta come c

FOL - sintassi

- L'insieme di formule della FOL è definito induttivamente come il più piccolo insieme tale che:
  - Se p è un simbolo di relazione n-aria e $t_1, \ldots, t_n$ sono termini, allora $p(t_1, \ldots, t_n)$ è una formula detta formula atomica o atomo
  - Se F e G sono formule e X è una variabile, allora

$$
\begin{gathered}
(\neg F) \\
(F \vee G) \\
(F \wedge G) \\
(F \rightarrow G) \\
(F \leftrightarrow G) \\
(\exists X F) \\
(\forall X F)
\end{gathered}
$$

    sono formule
- Un predicato nullario $p()$ è scritto semplicemente come p

FOL - sintassi

- I letterali sono atomi (letterali positivi) o atomi negati (letterali negativi)
- Le parentesi sono omesse ove possibile mediante il seguente ordine di precedenza: $\exists, \forall > \neg > \wedge > \vee > \rightarrow > \leftrightarrow$
- Per convenienza
  - $(\exists X_1(\ldots(\exists X_n(F))\ldots)$ è abbreviato come $(\exists X_1, \ldots, X_n(F))$ e
  - $(\forall X_1(\ldots(\forall X_n(F))\ldots)$ è abbreviato come $(\forall X_1, \ldots, X_n(F))$

FOL - sintassi

- Esempi di possibili traduzioni in FOL di frasi espresse in linguaggio naturale:
  - *"tutti gli esseri umani sono mortali"* diventa

$$(\forall X(h(X) \rightarrow m(X)))$$

  - *"ogni figlio ha dei genitori"* diventa

$$\forall X(c(X) \rightarrow (\exists Y \exists Z\ p(X, Y, Z))))$$

FOL - sintassi

Osservazioni sulla traduzione verso FOL

- Il connettivo principale usato con $\forall$ è $\rightarrow$
  - Esempio: *"al Polimi sono tutti brillanti"* si può tradurre così
    $\forall X(at(X, polimi) \rightarrow smart(X))$
  - Notare che la formula
    $\forall X(at(X, polimi) \wedge smart(X))$
    significa che tutti sono al Polimi e tutti sono brillanti!
- Analogamente, il connettivo principale da usare con $\exists$ è $\wedge$
  - Esempio: *"al Polimi qualcuno è brillante"* si può tradurre così
    $\exists X(at(X, polimi) \wedge smart(X))$
  - Notare che la formula
    $\exists X(at(X, polimi) \rightarrow smart(X))$
    significa che c'è qualcuno che o non è al Polimi o è brillante (o entrambe le cose)!

FOL - sintassi

- Se $QX(F)$ è una formula e Q un quantificatore, allora F si dice ambito di Q, e Q è applicato a F
- Un'occorrenza di una variabile in una formula è legata sse la sua occorrenza è entro l'ambito di un quantificatore che impiega quella variabile
  - È legata al quantificatore di ambito più piccolo che la rende legata
- Altrimenti è libera
- Esempio: $\forall X(\forall Y(p(X, Y) \wedge q(X, Y)))$
- Una formula è chiusa sse non contiene occorrenze libere di variabili

FOL - semantica

- Come per PL, anche FOL ha una semantica a due valori di verità basata sulla nozione di interpretazione
- Un'interpretazione $\mathcal{I}$ di un alfabeto $\mathcal{A}$ è un dominio non vuoto D (anche indicato $|\mathcal{I}|$) e una funzione che associa
  - ogni costante $c \in \mathcal{A}$ a un elemento $c_{\mathcal{I}} \in D$
  - ogni simbolo n-ario di funzione $f \in \mathcal{A}$ a una funzione $f_{\mathcal{I}} : D^n \mapsto D$
  - ogni simbolo n-ario di predicato $p \in \mathcal{A}$ a una relazione

    $$p_{\mathcal{I}} \subseteq \overbrace{D \times \ldots \times D}^{n \text{ volte}}$$
- Tuttavia, prima di assegnare un significato alle formule, va definito il significato dei termini
- Poiché i termini possono contenere variabili, occorre una valutazione (o stato), ossia una funzione dalle variabili di $\mathcal{A}$ a $|\mathcal{I}|$
- Il significato $\phi_{\mathcal{I}}(t)$ di un termine t nell'interpretazione $\mathcal{I}$ e valutazione ϕ è quindi definito induttivamente come
  - $c_{\mathcal{I}}$ se t è una costante c
  - $\phi(X)$ se t è una variabile X
  - $f_{\mathcal{I}}(\phi_{\mathcal{I}}(t_1), \ldots, \phi_{\mathcal{I}}(t_n))$ se t è della forma $f(t_1, \ldots, t_n)$

FOL - semantica

- Esempio: si consideri il termine $g(f(c), X)$
- Sia $\mathcal{I}$ un'interpretazione con $|\mathcal{I}| = \mathbb{N}$ e tale che
  - Costanti: $c_{\mathcal{I}} = 0$
  - Funzioni: $f_{\mathcal{I}}(x) = 1 + x$ (successore), $g_{\mathcal{I}}(x, y) = x + y$ (addizione)
- Sia ϕ una valutazione tale che $\phi(X) = 0$
- Allora

$$\begin{aligned} \phi_{\mathcal{I}}(g(f(c), X)) &= \phi_{\mathcal{I}}(f(c)) + \phi_{\mathcal{I}}(X) \\ &= (1 + \phi_{\mathcal{I}}(c)) + \phi(X) \\ &= (1 + 0) + 0 \\ &= 1 \end{aligned}$$

- Lo stesso termine può avere significati diversi. Per esempio:
  - $|\mathcal{I}| =$ persone nella Bibbia
  - $c_{\mathcal{I}} =$ Abele
  - $f_{\mathcal{I}}(x) =$ padre di x, $g_{\mathcal{I}}(x, y) =$ primogenito di x e y
  - e una valutazione ϕ tale che $\phi(X) =$ Eva
  - Alla fine si ottiene $\phi_{\mathcal{I}}(g(f(c), X)) =$ Caino

FOL - semantica

- Sia ϕ una valutazione, X una variabile, $\mathcal{I}$ un'interpretazione e $c_{\mathcal{I}} \in |\mathcal{I}|$
- Allora $\phi[X \mapsto c_{\mathcal{I}}]$ è una valutazione identica a ϕ a parte per il fatto che manda X in $c_{\mathcal{I}}$
- Il significato di una formula è un valore di verità che è definito induttivamente come segue
- Scriviamo $\mathcal{I} \models_{\phi} F$ per indicare che F è vero rispetto a $\mathcal{I}$ e ϕ

$$
\begin{array}{rl}
\mathcal{I} \models_{\phi} p(t_1, \ldots, t_n) & \text{sse } \langle \phi_{\mathcal{I}}(t_1), \ldots, \phi_{\mathcal{I}}(t_n) \rangle \in p_{\mathcal{I}} \\
\mathcal{I} \models_{\phi} (\neg F) & \text{sse } \mathcal{I} \not\models_{\phi} F \\
\mathcal{I} \models_{\phi} (F \wedge G) & \text{sse } \mathcal{I} \models_{\phi} F \text{ e } \mathcal{I} \models_{\phi} G \\
\mathcal{I} \models_{\phi} (F \vee G) & \text{sse } \mathcal{I} \models_{\phi} F \text{ o } \mathcal{I} \models_{\phi} G \\
\mathcal{I} \models_{\phi} (F \rightarrow G) & \text{sse } \mathcal{I} \not\models_{\phi} F \text{ o } \mathcal{I} \models_{\phi} G \\
\mathcal{I} \models_{\phi} (F \leftrightarrow G) & \text{sse } \mathcal{I} \models_{\phi} (F \rightarrow G) \text{ e } \mathcal{I} \models_{\phi} (G \rightarrow F) \\
\mathcal{I} \models_{\phi} (\forall X(F)) & \text{sse } \mathcal{I} \models_{\phi[X \mapsto c_{\mathcal{I}}]} F \text{ per ogni } c_{\mathcal{I}} \in |\mathcal{I}| \\
\mathcal{I} \models_{\phi} (\exists X(F)) & \text{sse } \mathcal{I} \models_{\phi[X \mapsto c_{\mathcal{I}}]} F \text{ per qualche } c_{\mathcal{I}} \in |\mathcal{I}|
\end{array}
$$

FOL - semantica

- If $\boldsymbol{F}$ è una formula chiusa, il suo significato dipende solo dall'interpretazione
- La valutazione sarà quindi omessa quando si considerano formule chiuse
- Un'interpretazione $\mathcal{I}$ è detta modello per $\boldsymbol{F}$, indicato con $\mathcal{I} \models \boldsymbol{F}$, sse per ogni valutazione ϕ si ha che $\mathcal{I} \models_{\phi} \boldsymbol{F}$
- Se $\mathcal{F}$ è un insieme di formule, un'interpretazione è un modello di $\mathcal{F}$ sse è un modello per ogni $\boldsymbol{F} \in \mathcal{F}$

FOL - semantica

- Esempio (continuazione)
- Sia $\mathcal{I}$ un'interpretazione con $|\mathcal{I}| = \mathbb{N}$ e tale che
  - Costanti: $c_{\mathcal{I}} = 0$
  - Funzioni: $f_{\mathcal{I}}(x) = 1 + x$ (successore)
  - Predicati: $p_{\mathcal{I}} = \{\langle 1 \rangle, \langle 3 \rangle, \langle 5 \rangle, \ldots\}$
- Allora il significato della formula $p(c) \wedge p(f(c))$ in $\mathcal{I}$ è come segue

$$
\begin{aligned}
\mathcal{I} \models p(c) \wedge p(f(c)) \quad & \text{sse } \mathcal{I} \models p(c) \text{ e } \mathcal{I} \models p(f(c)) \\
& \text{sse } \langle \phi_{\mathcal{I}}(c) \rangle \in p_{\mathcal{I}} \text{ e } \langle \phi_{\mathcal{I}}(f(c)) \rangle \in p_{\mathcal{I}} \\
& \text{sse } \langle \phi_{\mathcal{I}}(c) \rangle \in p_{\mathcal{I}} \text{ e } \langle 1 + \phi_{\mathcal{I}}(c) \rangle \in p_{\mathcal{I}} \\
& \text{sse } \langle 0 \rangle \in p_{\mathcal{I}} \text{ e } \langle 1 \rangle \in p_{\mathcal{I}}
\end{aligned}
$$

- Ora, $\langle 1 \rangle \in p_{\mathcal{I}}$ ma $\langle 0 \rangle \notin p_{\mathcal{I}}$, quindi $\mathcal{I}$ non è un modello per la formula

FOL - semantica

- La relazione di conseguenza logica $\models$ tra insiemi di formule e formule può essere esteso a FOL
- così come i concetti di validità, soddisfacibilità, falsificabilità, contingenza e insoddisfacibilità

FOL - semantica

Equivalenze

- Le equivalenze mostrate per PL si possono estendere a FOL
- Ecco alcune equivalenze aggiuntive per FOL:

$$\forall X(F) \equiv \neg(\exists X(\neg F)) \quad \text{dualità dei quantificatori 1} \tag{1}$$

$$\exists X(F) \equiv \neg(\forall X(\neg F)) \quad \text{dualità dei quantificatori 2} \tag{2}$$

$$\forall X(F) \wedge (\forall X)G \equiv \forall X(F \wedge G) \tag{3}$$

$$\exists X(F) \vee (\exists X)G \equiv \exists X(F \vee G) \tag{4}$$

$$(\forall X)(\forall Y)F \equiv (\forall Y)(\forall X)F \tag{5}$$

$$(\exists X)(\exists Y)F \equiv (\exists Y)(\exists X)F \tag{6}$$

$$(\forall X(F)) \wedge G \equiv \forall X(F \wedge G) \ * \tag{7}$$

$$(\forall X(F)) \vee G \equiv \forall X(F \vee G) \ * \tag{8}$$

$$(\exists X(F)) \wedge G \equiv \exists X(F \wedge G) \ * \tag{9}$$

$$(\exists X(F)) \vee G \equiv \exists X(F \vee G) \ * \tag{10}$$

* si applica solo se X non è libera in G